

MODELOS DISCRETOS

En esta primera clase quisiera presentar algunos modelos discretos que nos ayudarán a desarrollar cierta intuición sobre problemas elípticos.

1. EL PROBLEMA DEL BARRENDERO

Un barrendero tiene la tarea de limpiar una dada región (acotada) en cuarto cubierto de baldosas. Cada vez que este barre una baldosa, toda la masa que se encuentra en ella se distribuye en porciones iguales entre las cuatro baldosas adyacentes. En general, limpiar la región es un proceso que entendemos en el límite de un número infinito de pasos.

El orden en que se barren las baldosas no es conmutativo, véase por ejemplo la Figura 2. Sin embargo, descubrimos que en el límite se recupera una cierta propiedad Abeliana: Una vez limpia la región, la distribución de masa alrededor de ella es independiente de como se haya barrido.

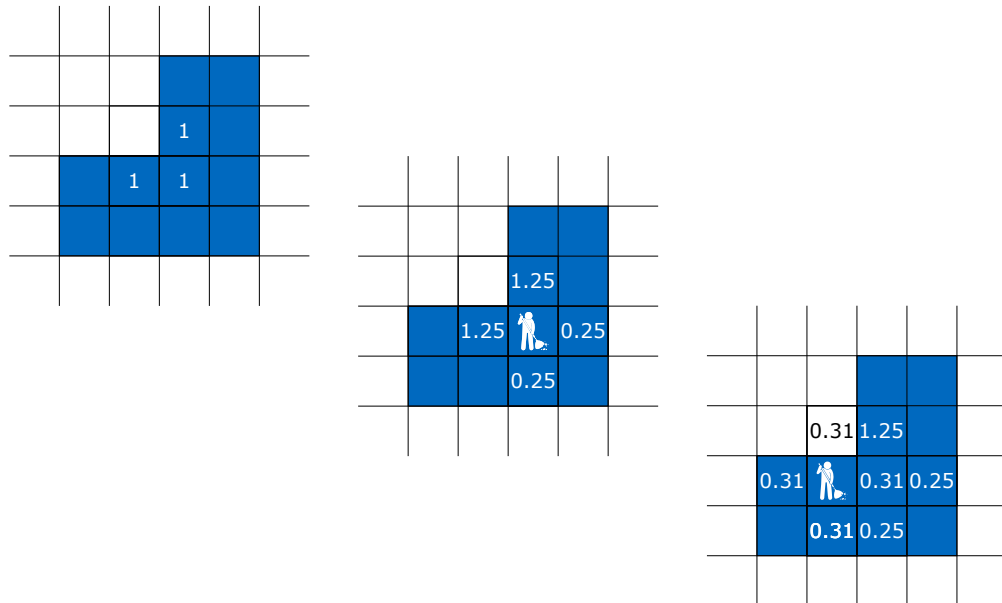


FIGURA 1. Dos iteraciones del problema del barrendero

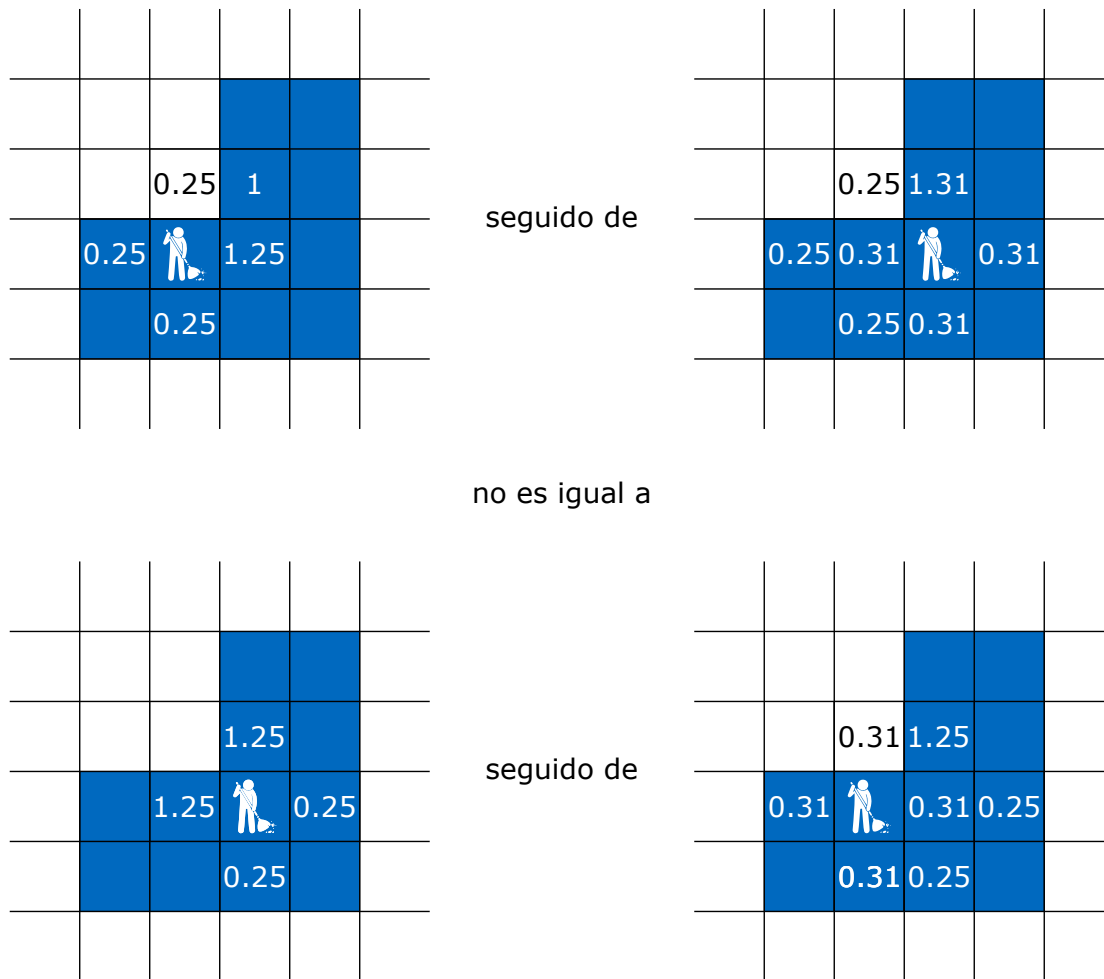


FIGURA 2. Propiedad no Abeliana

1.1. Formulación del Problema. Decimos que dos baldosas $x, y \in \mathbb{Z}^2$ son **adyacentes** si $\|x - y\| = 1$, en cuyo caso lo denotamos por $x \sim y$. Es decir que cada baldosa tiene exactamente cuatro baldosas adyacentes en cada una de las direcciones cardinales.

Sea $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ la **distribución de masa inicial** que buscamos barrer de algún $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$. Un **plan de barridas** está dado por una lista de baldosas $b_1, b_2, \dots \in \Omega$, las que iremos barriendo en el orden respectivo. Si $\mu_i : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ denota la distribución de masa luego del i^{mo} paso, se tiene entonces la siguiente fórmula recursiva comenzando de $\mu_0 := \mu$,

$$\mu_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = b_i \\ \mu_{i-1}(x) + \frac{1}{4}\mu_{i-1}(b_i) & \text{si } x \sim b_i \\ \mu_{i-1}(x) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Decimos que el plan $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ barre a μ de Ω si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Nuestro teorema puede ser entonces formulado de la siguiente manera.

Teorema 1. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ se tiene que cualesquiera dos planes $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ y $b'_1, b'_2, \dots \in \Omega$ que barren a μ de Ω satisfacen que los siguientes límites existen para todo $x \in \mathbb{Z}^2$ y*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu'_i(x).$$

Daremos la demostración del teorema en la Sección 1.3.1 luego de presentar y motivar algunas construcciones auxiliares.

1.2. Ley de Conservación. Una idea útil es llevar el registro de cuánta masa ha salido de una dada baldosa x hasta una dada iteración. Para ser precisos definimos para cada subíndice $i \geq 0$ las funciones $u_i : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ comenzando por $u_0 = 0$ y de forma inductiva según¹

$$u_i := u_{i-1} + \mu_{i-1}(b_i)1_{b_i}$$

Observemos que para cualquier plan $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ se tiene necesariamente que $u_i = 0$ en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$.

La función u_i nos permite dar una fórmula para la **ley de conservación de masas**: En los primeros i pasos, la masa que entra menos la que sale de una baldosa x es justamente la diferencia entre las distribuciones μ_i menos μ_0 en x

$$\underbrace{\frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u_i(y)}_{\text{masa que entra}} - \underbrace{u_i(x)}_{\text{masa que sale}} = \underbrace{\mu_i(x)}_{\text{masa final}} - \underbrace{\mu_0(x)}_{\text{masa inicial}}$$

Esta puede ser demostrada por un argumento inductivo que dejamos de ejercicio.

¹Usamos la siguiente notación para $A \subseteq \mathbb{Z}^2$,

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Si $A = \{b\}$, entonces abreviamos $1_b := 1_{\{b\}}$.

Vemos conveniente a partir de ahora definir el **Laplaciano** de una función $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (pudiendo tomar valores positivos y negativos) como la función $\Delta u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta u(x) := \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u(y) - u(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} (u(y) - u(x)).$$

Observemos que Δ es un operador lineal en el sentido que respeta combinaciones lineales de funciones $u, v : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con coeficientes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha \Delta u + \beta \Delta v.$$

Esta propiedad también es conocida como el **principio de superposición**.

Volviendo al modelo del barrendero, vemos que si $\mu_i \rightarrow \mu_\infty$ entonces u_i también converge a una función $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ ² tal que $\Delta u = \mu_\infty - \mu_0 = \mu_\infty - \mu$. Si el plan barre a Ω recuperamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales que en principio tiene un número infinito de variables $\{u(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^2}$, así como un número infinito de ecuaciones

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

La ecuación $\Delta u = -\mu$ en Ω se conoce como la **ecuación de Poisson**.

En realidad las ecuaciones dadas en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ ya determinan que los valores de u en esa región deben anularse y se consideran como **condiciones de borde**. Las verdaderas ecuaciones ocurren en Ω . Si denotamos por $N = |\Omega|$ a la cardinalidad de Ω , observamos que en realidad contamos con un sistema de N ecuaciones con el mismo número de incógnitas.

Veamos a grandes rasgos las ideas en la demostración del Teorema 1 a partir de estas construcciones. Si el sistema que satisface u tiene una única solución, entonces esta función queda determinada por μ y Ω y es independientemente del plan. Usando que $\mu_\infty = \mu + \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta u_i = \mu + \Delta u$ vemos que también μ_∞ es independientemente del plan, lo cual concluiría la demostración.

Ejercicio 1. *Asumiendo la estrategia esbozada en esta sección, calcula la distribución final μ_∞ si $\Omega = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ y $\mu = 1_\Omega$.*

1.3. Principio del Mínimo. El principio del mínimo nos permitirá demostrar que el sistema dado por (1) no tiene más de una solución. Para problemas lineales con igual número (finito) de ecuaciones que de incógnitas, esto equivale a decir que el sistema de hecho siempre tiene solución.

La idea consiste en el siguiente principio: Si $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es no-negativa en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ y satisface $\Delta u \leq 0$ en Ω ³ entonces u es necesariamente no-negativa en Ω . Como veremos en la siguiente demostración, esto es una manifestación del criterio de la segunda derivada (discreto): $\Delta u(x^*) \geq 0$ si u alcanza su mínimo en x^* y la desigualdad es estricta si $u(x^*)$ es localmente un mínimo estricto, es decir un mínimo estricto de $\{u(y) : y \sim x^*\} \cup \{u(x^*)\}$.

Lema 1 (Principio del Mínimo). *Sea $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito $\Delta u \leq 0$ en Ω . Entonces*

$$\inf_{\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega} u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \min_{\Omega} u \geq 0.$$

²Daremos una prueba rigurosa de este hecho en la Sección 1.3.1

³Más adelante diremos que u es super-armónica o una super-solución

Demostración. Asumamos por contradicción que $m := \min_{\Omega} u < 0$ y sea $\Omega' = \{x \in \Omega : u(x) = m\}$ finito y no vacío. Tomemos ahora $x^* \in \Omega'$ tal que existe $y \sim x^*$ en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega'$, es decir que $u(y) > u(x^*)$. Vemos ahora que tenemos la siguiente contradicción a partir de evaluar $\Delta u \leq 0$ en x^*

$$u(x^*) < \frac{1}{4} \sum_{z \sim x^*} u(z) \leq u(x^*).$$

□

Corolario 1 (Existencia y unicidad de soluciones). *Para $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu, \varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única*

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Demostración. Basta con demostrar que el sistema lineal dado por las ecuaciones en Ω , con $N = |\Omega|$ ecuaciones e incógnitas, tiene a lo sumo una solución. En otras palabras, el operador lineal asociado de $\mathbb{R}^N$ en si mismo es inyectivo, y por lo tanto también es biyectivo gracias al Teorema Fundamental del Álgebra Lineal.

Si $u, v : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son dos soluciones, entonces $w := u - v$ satisface $\Delta w = 0$ en Ω y $w = 0$ en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$. Gracias al principio del mínimo obtenemos que $w \geq 0$ en Ω y por lo tanto en todo $\mathbb{Z}^2$. Si aplicamos el mismo razonamiento a $-w$ obtenemos la otra desigualdad de donde concluimos $w = 0$, es decir que queda establecida la unicidad de soluciones y con ello la demostración. □

Ejercicio 2. *Demuestra que si $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_2 > 0\}$ entonces existen por lo menos dos soluciones distintas del problema*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Es decir que la hipótesis de que Ω sea finito es necesaria para la unicidad de soluciones.

1.3.1. Demostración del Teorema 1.

Construimos de forma recursiva y partiendo de $u_0 := 0$ las funciones $u_i := u_{i-1} + \mu_{i-1} 1_{b_i}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u_i = \mu_i - \mu \text{ en } \Omega, \\ u_i = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Definimos también $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Debemos verificar los siguientes puntos:

1. $\mu_{\infty} := \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i$ está bien definido.
2. $u_{\infty} := \lim_{i \rightarrow \infty} u_i$ está bien definido.
3. $u_{\infty} = u$.

Para ver el primer punto basta con fijarse en el comportamiento de μ_i en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, ya que sabemos por hipótesis que estas tienden a cero en Ω . En $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ se tiene que μ_i es una sucesión no-decreciente de funciones que está mayorizada por $\mu + \sum_{x \in \Omega} \mu(x)$.

Como u_i es no-decreciente, basta con probar que $u \geq u_i$ para demostrar el segundo punto y adicionalmente obtener $u \geq u_\infty$. La diferencia $v_i := u - u_i$ satisface

$$\begin{cases} \Delta v_i = \Delta u - \Delta u_i = -\mu_i \leq 0 \text{ en } \Omega, \\ v_i = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Gracias principio del mínimo se deduce que $\min_\Omega v_i \geq 0$ y por lo tanto $u \geq u_i$.

Dado que $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ barre a μ de Ω tenemos que tomando $i \rightarrow \infty$ en el sistema para u_i

$$\begin{cases} \Delta u_\infty = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u_\infty = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Por la unicidad de soluciones del problema lineal llegamos a que necesariamente $u_\infty = u$.

Finalmente podemos calcular μ_∞ a partir de $\mu_\infty = \mu + \Delta u_\infty$. Recordemos que $u_\infty = u$ está igualmente definido por un sistema de ecuaciones lineales que depende solamente de Ω y μ y no del plan. Esto concluye así la demostración del teorema.

1.3.2. Existencia de planes que barren un dominio finito. Nuestro teorema garantiza que para cualquier $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ se tiene que si μ puede ser barrido de Ω , entonces la distribución de masa que queda por fuera de Ω es independiente del plan. Queda abierta la pregunta de si podemos en todo caso barrer o no a μ de Ω .

Teorema 2. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ existe un plan $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ que barre a μ de Ω .*

Demostración. Sea $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ un plan que recorre cada baldosa un número infinito de veces. Ciertamente estos planes existen incluso si Ω es infinito (usando un argumento de diagonal de Cantor). Esta condición implica que para cada $x \in \Omega$, existe un número infinito de sub-índices tales que $\mu_i(x) = 0$. Basta probar así que $\mu_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i$ existe para deducir que necesariamente $\mu_\infty = 0$ en Ω .

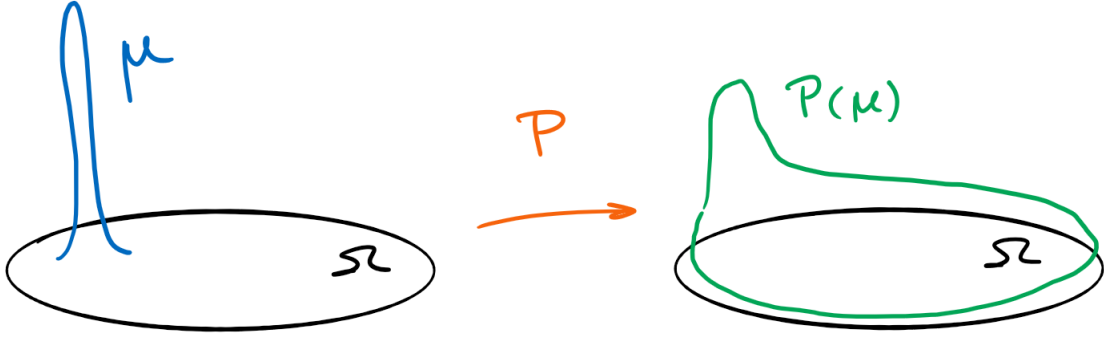
Definimos u_i y u exactamente como en la demostración anterior. Recordemos que u_i es no-decreciente y (por el principio del mínimo) acotada por u , por lo tanto $u_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} u_i$ está bien definida. Dado que $\mu_i = \mu + \Delta u_i$ tenemos que la existencia del límite para μ_i queda demostrada por la existencia del límite para u_i . $\square$

Ejercicio 3. *Demuestra que existe un plan que barre a $\mu = 1_{(1,0)}$ de $\Omega = \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

1.4. El núcleo de Poisson.

Definición 1. *Para $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Omega$ definimos la barrida de μ en Ω como la función μ_∞ que resulta de barrer μ de Ω por cualquier plan. Denotamos esta construcción por $P_\Omega(\mu)$ o podemos omitir la dependencia en Ω si esta queda sobrentendida.*

Cuando $\mu = 1_x$ entonces $P(x, y) := P(1_x)(y)$ se denomina el núcleo de Poisson de Ω .


 FIGURA 3. Barrida de μ en Ω .

Ejercicio 4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$. Demuestra la siguiente identidad de conservación de masa

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mu(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} P(\mu)(x).$$

Ejercicio 5. Sea $\Omega = \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y $\mu = 1_{(1,0)}$. ¿Será cierto que $P(\mu)(0, 0) = 1$, o habrá masa que escapa a infinito?⁴

Propiedad 1 (Aditividad). Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito, $\mu, \nu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ y $\alpha, \beta \geq 0$ se tiene que

$$P(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha P(\mu) + \beta P(\nu).$$

Demostración. Sean $u, v, w : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = -\nu & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta w = -(\alpha\mu + \beta\nu) & \text{en } \Omega, \\ w = 0 & \text{en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

por definición sabemos así que

$$P(\mu) = \mu + \Delta u, \quad P(\nu) = \nu + \Delta v, \quad P(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha\mu + \beta\nu + \Delta w.$$

También por unicidad de soluciones deducimos que $w = \alpha u + \beta v$ y por lo tanto

$$P(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha\mu + \beta\nu + \Delta w = \alpha(\mu + \Delta u) + \beta(\nu + \Delta v) = \alpha P(\mu) + \beta P(\nu).$$

□

La identidad aditiva nos permite extender P para $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tomando posiblemente valores positivos y negativos, de la siguiente forma

$$P(\mu) = P(\mu_+) - P(\mu_-),$$

donde $\mu_+ = \max(\mu, 0)$ y $\mu_- = \max(-\mu, 0)$ son las partes positivas y negativas de $\mu = \mu_+ - \mu_-$.

Propiedad 2 (Semi-grupo). Dados $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ finitos

$$P_{\Omega_2} = P_{\Omega_2} \circ P_{\Omega_1}.$$

⁴Pista: El problema se puede reducir a verificar que $\Delta u(0, 0) = -\Delta u(1, 0)$. La función u parece tener una simetría en el eje $x = 1/2$ la cual podría ser demostrada por un resultado de unicidad (Liouville): Las funciones armónicas y acotadas en $\mathbb{Z}^2$ son únicamente las constantes.

Demostración. Sea $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ arbitraria y $u, v, w : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega_1, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega_1. \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = -P_{\Omega_1}(\mu) \text{ en } \Omega_2, \\ v = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega_2. \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta w = -\mu \text{ en } \Omega_2, \\ w = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

por definición sabemos así que

$$P_{\Omega_1}(\mu) = \mu + \Delta u, \quad P_{\Omega_2}(P_{\Omega_1}(\mu)) = P_{\Omega_1}(\mu) + \Delta v, \quad P_{\Omega_2}(\mu) = \mu + \Delta w.$$

Basta con demostrar que $w = u + v$ para obtener de esta forma que

$$P_{\Omega_2}(\mu) = \mu + \Delta w = \mu + \Delta u + \Delta v = P_{\Omega_1}(\mu) + \Delta v = P_{\Omega_2}(P_{\Omega_1}(\mu)).$$

Ambas funciones w y $u+v$ se anulan en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, veamos entonces que $\Delta(u+v) = \Delta w = -\mu$ en Ω_2 para concluir por unicidad la identidad esperada. En $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ tenemos que $P_{\Omega_1}(\mu) = 0$ y por lo tanto $\Delta(u+v) = -\mu + P_{\Omega_1}(\mu) = -\mu$. En el complemento $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ usamos que $\Delta v = -P_{\Omega_1}(\mu) = -(\mu + \Delta u)$ y por lo tanto $\Delta(u+v) = -\mu$. Esto concluye la demostración. $\square$

2. CAMINATAS ALEATORIAS

Consideremos ahora un problema distinto. Un borracho parte de una posición inicial $x \in \mathbb{Z}^2$ y se mueve con igual probabilidad a cualquiera de sus cuatro posiciones adyacentes. Es decir que si x_i es la posición (aleatoria) del borracho luego de i pasos, tenemos que las **probabilidades de transición** están dadas por

$$\mathbb{P}(x_i = y \mid x_{i-1} = x) = \begin{cases} 1/4 \text{ si } y \sim x, \\ 0 \text{ en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$, sea τ el número de pasos que toma el borracho para salir de Ω por primera vez, también conocido como el **tiempo de salida** de la caminata

$$\tau := \min\{i \geq 0 : x_i \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega\}.$$

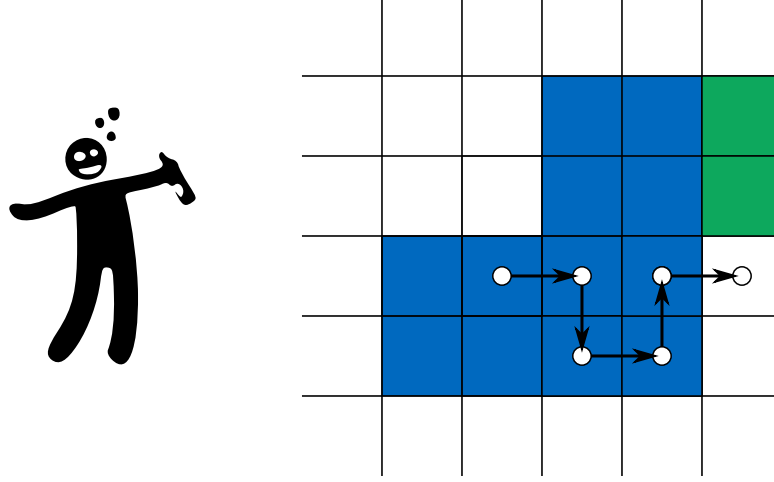
Para nuestro modelo, podemos interpretar $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ como la región en la ciudad $\mathbb{Z}^2$ donde hay ley seca. El borracho pasea en Ω y una vez que sale de Ω se queda dormido o lo atrapa la policía.

Dado $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ (quizás sea la casa del nuestro protagonista) queremos calcular la probabilidad de que el paseo en Ω termine (felizmente) en A dado que comienza en x , es decir

$$p(x) := \mathbb{P}(x_\tau \in A \mid x_0 = x).$$

Si inicialmente $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, tenemos que $x_\tau = x_0 = x$ y por lo tanto $p = 1_A$. Si en cambio $x \in \Omega$, la probabilidad $p(x)$ puede ser calculada si conocemos los valores de $p(y)$ para $y \sim x$. Para $y \sim x$ fijo, tenemos que con probabilidad un cuarto $x_1 = y$, y a partir de y tenemos que el paseo en Ω sale por A con probabilidad $p(y)$. En otras palabras

$$p(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} p(y).$$


 FIGURA 4. Paseo del borracho. Ω azul y A verde.

En términos del Laplaciano podemos caracterizar a la probabilidad p como la solución del sistema

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \text{ en } \Omega, \\ p = 1_A \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases} \quad .$$

2.1. Caminatas y el núcleo de Poisson. A partir de la probabilidad de salida p con respecto de $A = \{y\}$ también podemos definir el núcleo de Poisson.

Lema 2. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $y \in \mathbb{Z}^2$, el núcleo de Poisson P satisface que $p = P(\cdot, y)$ es la solución del sistema*

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \text{ en } \Omega, \\ p = 1_y \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases} \quad .$$

Interpretamos $P(x, y)$ como la probabilidad de que la caminata en Ω que parte de x , salga por y . Esto es una probabilidad de transición para el tiempo aleatorio τ

$$P(x, y) = \mathbb{P}(x_\tau = y \mid x_0 = x).$$

Recordemos que para $x \in \mathbb{Z}^2$ fijo, esto fue definido como la distribución de masa $P(\mu)$ que resulta de barrer $\mu = 1_x$ de Ω .

Demostración. Por un lado es claro que si $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ entonces al evaluar $P(x, y) = P(1_x)(y) = 1_x(y) = 1_y(x)$. En otras palabras, barrer 1_x de Ω vuelve a dar 1_x dado que x está fuera de Ω .

Si $x \in \Omega$ consideremos entonces $\Omega_1 := \{x\} \subseteq \Omega_2 := \Omega$ y usando las identidades del núcleo de Poisson

$$P(x, y) = P_{\Omega_2} \circ P_{\Omega_1}(y) = P\left(\frac{1}{4} \sum_{z \sim x} 1_z\right)(y) = \frac{1}{4} \sum_{z \sim x} P(z, y).$$

Con esto concluimos que $\Delta_x P = 0$ en Ω tal como se esperaba. $\square$

Gracias a la linealidad del Laplaciano, el núcleo de Poisson nos permite calcular cualquier solución del siguiente sistema con $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ arbitrario

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}.$$

La ecuación $\Delta u = 0$ en Ω se conoce como la **ecuación de Laplace** la cual junto con la condición de borde se conoce como el **problema de Dirichlet**. Las soluciones de la ecuación de Laplace en Ω se denominan como **funciones armónicas**.

Por superposición o linealidad es directo verificar que la **fórmula de representación**

$$u = \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} \varphi(y) P(\cdot, y).$$

es solución del problema de Dirichlet, del cual ya sabemos que existe exactamente una solución.

La interpretación probabilista de la solución está dada en cambio por el valor esperado

$$u(x) = \mathbb{E}(\varphi(x_\tau) \mid x_0 = x).$$

Esta se puede demostrar verificando que este valor esperado satisface el sistema de ecuaciones anterior o quizás usando el principio de superposición a partir de las probabilidades de transición dadas por $P(x, y) = \mathbb{P}(x_\tau = y \mid x_0 = x)$.

2.1.1. Ejemplo. Veamos como calcular el núcleo de Poisson para una avenida $\Omega = [1, n] \times \{0\} \cap \mathbb{Z}^2$ con $n \geq 1$. Denotamos a lo largo de este ejemplo a $p_i := P((0, i), y)$, los valores de interés ($P(x, y) = 0$ si $x_1 \neq 0$).

Caso 0: Si $y \in \Omega \cup (\mathbb{Z}^2 \setminus \bar{\Omega})$ donde $\bar{\Omega} = \{z \in \mathbb{Z}^2 : z \sim x \text{ para algún } x \in \Omega\}$ entonces $P(\cdot, y) = 0$.

Caso 1: Si $y = (n+1, 0)$ tenemos que $p_{n+1} = 1$, $p_i = 0$ para $i \in \mathbb{Z} \setminus [1, n+1]$, y para $i \in [1, n]$ tenemos la recurrencia

$$4p_i = p_{i-1} + p_{i+1}.$$

El polinomio característico tiene raíces $r_\pm = 2 \pm \sqrt{3}$ de donde obtenemos la descomposición

$$p_i = A_+ r_+^i + A_- r_-^i.$$

De las condiciones de borde obtenemos los coeficientes $A_\pm$ de donde completamos las fórmulas para p_i en este caso

$$\begin{cases} A_+ + A_- = 0 \\ A_+ r_+^{n+1} + A_- r_-^{n+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow A_+ = -A_- = \frac{1}{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}.$$

El caso $y = (0, 0)$ tiene un tratamiento similar.

Caso 2: Si $y = (j, 1)$ con $j \in [1, n]$ tenemos que $p_i = 0$ para $i \in \mathbb{Z} \setminus [1, n]$, y para $i \in [1, n]$ tenemos la recurrencia

$$4p_i = p_{i-1} + p_{i+1} + \delta_{ij}.$$

Una vez más encontramos así dos representaciones dependiendo de la posición de índice i con respecto a j

$$p_i = \begin{cases} A(r_+^i - r_-^i) & \text{si } i \in [1, j] \\ B(r_+^{n+1-i} - r_-^{n+1-i}) & \text{si } i \in [j, n] \end{cases}$$

Dado que las fórmulas deben coincidir si $i = j$, y dado que $4p_j = p_{j-1} + p_{j+1} + 1$ obtenemos un sistema lineal para determinar A y B con el cual concluimos el cómputo

$$\begin{cases} (r_+^j - r_-^j)A - (r_+^{n+1-j} - r_-^{n+1-j})B = 0 \\ [4(r_+^j - r_-^j) - (r_+^{j-1} - r_-^{j-1})]A - (r_+^{n-j} - r_-^{n-j})B = 1. \end{cases}$$

El caso $y = (j, -1)$ tiene un tratamiento similar.

2.2. La función de Green. Dado ahora $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ otra variable aleatoria de interés es el número de veces que encontramos $x_i \in A$ para $i < \tau$ (quizás un bar para nuestro borracho). Esta variable también se conoce como el **tiempo de ocupación** de A y está definida de forma precisa por

$$N := \sum_{i=0}^{\tau-1} 1_A(x_i).$$

El valor esperado en función de la posición inicial de la caminata

$$n(x) := \mathbb{E}(N \mid x_0 = x)$$

también satisface un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \Delta n = -1_A \text{ en } \Omega, \\ n = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}.$$

Por un lado la condición de borde es automática puesto que si $x_0 = x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ entonces como ya está fuera de Ω , nunca puede visitar a A en su paseo (inexistente) por Ω . Por otro lado, para $x \in \Omega$, $n(x)$ se puede obtener a partir de los valores de $n(y)$ para $y \sim x$. Dado $y \sim x$, la probabilidad de que $x_1 = y$ es un cuarto, y a partir de acá consideramos dos casos:

- Si $x \in A$ entonces el tiempo de ocupación partiendo de x es uno más que el tiempo de ocupación partiendo de y .
- Si $x \in \Omega \setminus A$, el tiempo de ocupación partiendo de x es el mismo tiempo de ocupación partiendo de y .

Tomando los valores esperados

$$n(x) = 1_A(x) + \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} n(y).$$

Lo cual es equivalente a $\Delta n = -1_A$ en Ω .

Recordemos que en la sección anterior para el problema del barrendero demostramos que el sistema tiene soluciones únicas. Esto implica que la siguiente construcción está bien definida.

Definición 2. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito definimos la función de Green $G : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $n = G(\cdot, y)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} \Delta n = -1_y \text{ en } \Omega, \\ n = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}.$$

Al igual que antes, la linealidad del operador permite dar la fórmula de representación

$$u = \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} \mu(y) G(\cdot, y)$$

para la solución del sistema

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}.$$

En términos probabilistas

$$u(x) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{\tau-1} \mu(x_i) \mid x_0 = x \right).$$

Usando tanto el núcleo de Poisson como la función de Green tenemos entonces que

$$u = \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} (\mu(y) G(\cdot, y) + \varphi(y) P(\cdot, y))$$

es la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}.$$

Ejercicio 6. Calcula la función de Green para la avenida $\Omega = [1, n] \times \{0\} \cap \mathbb{Z}^2$ con $n \geq 1$.

Ejercicio 7. Demuestra y da una interpretación probabilista para las siguientes propiedades:

- **Reversibilidad:** $G(x, y) = G(y, x)$.
- **Frecuencia:** Si $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, P es el núcleo de Poisson de Ω , y $G = G_{\Omega \cup \{y\}}$ es la función de Green con respecto de $\Omega \cup \{y\}$, entonces

$$P(x, y) = \frac{G(x, y)}{G(y, y)}.$$

3. PROBLEMA: MÉTODO DE BALAYAGE (QUE EN FRANCÉS SIGNIFICA BARRER)

Poincaré propuso a finales del siglo XIX el siguiente algoritmo para resolver el sistema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}.$$

Sea $\partial\Omega := \{y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega : \exists x \in \Omega \text{ adyacente a } y\}$. Dado que $m := \inf_{\partial\Omega} \varphi$ es finito, construimos

$$u_0(x) := \begin{cases} m \text{ si } x \in \Omega, \\ \varphi(x) \text{ en cualquier otro caso.} \end{cases}.$$

tal que

$$\begin{cases} \Delta u_0 \geq 0 \text{ en } \Omega, \\ u_0 = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}.$$

Sea $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ tal que para cada $x \in \Omega$ el conjunto de índices $\{i : b_i = x\}$ es infinito. Definimos ahora u_i modificando a u_{i-1} en b_i de forma que $\Delta u_i(b_i) = 0$, es decir

$$u_i(x) := \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{y \sim b_i} u_{i-1}(y) & \text{si } x = b_i, \\ u_{i-1}(x) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

En otras palabras, en el paso i estamos barriendo el Laplaciano de u_{i-1} en b_i .

Demuestra que si Ω es finito, entonces u_i es una sucesión que converge a la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}.$$

4. PROBLEMA BONO: DOS COMPADRES

Dos borrachitos se encuentran paseando en la avenida $\Omega = [1, n] \times \{0\} \cap \mathbb{Z}^2$ con $n \geq 2$. Uno parte de $x = (1, 0)$, el otro de $y = (n, 0)$, y ambos toman pasos simultáneamente en $\mathbb{Z}^2$ con igual probabilidad en las cuatro direcciones cardinales. Da una fórmula para la probabilidad $p(n)$ de que se encuentren en Ω (es decir que ambos coinciden en la misma casilla al mismo tiempo, no vale que se crucen) antes de que alguno de ellos salga de Ω .