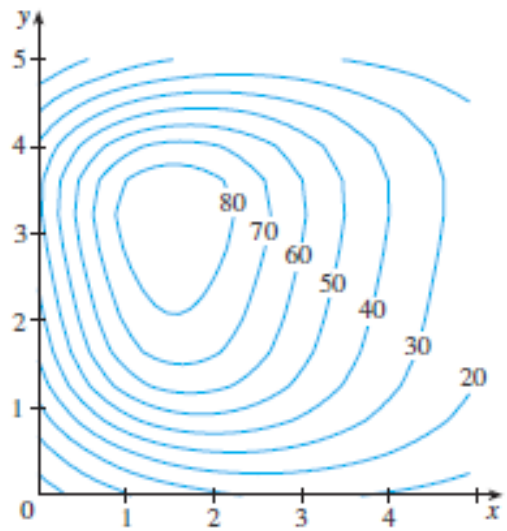
QUIZ 7 - CÁLCULO 3

Nombres:

Resuelva por lo menos 2 de los siguientes problemas.

1. La siguiente gráfica para los conjuntos de nivel de una dada función f sugiere que $\partial_x f(3,2) < 0$. Dé un argumento a favor de dicha afirmación.



2. Considera el elipsoide

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 4 + 2xy + 2yz + 2zx\}$$

(1) Calcula el plano tangente en $(0,0,2/\sqrt{3})$.

(2) Verifica que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

(3) Verifica que el plano tangente a la esfera $u^2+v^2+w^2 = 1$ en $(1,1,-1)/\sqrt{3}$ (dado por $u+v-w = \sqrt{3}$) se transforma en el plano tangente a E en $(0,0,2/\sqrt{3})$ por medio del cambio de variables $(u,v,w) \mapsto (x,y,z)$ definido en la parte anterior.

3. Sea $z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

(1) Verifica la siguiente identidad para calcular el Laplaciano en coordenadas polares

$$\underbrace{\partial_x^2 z + \partial_y^2 z}_{\Delta z} = \partial_r^2 z + r^{-1}\partial_r z + r^{-2}\partial_\theta^2 z$$

(2) Calcula Δz para $z = \mathrm{Re}(x+iy)^n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j}(-1)^j x^{n-2j} y^{2j}$

4. Dado $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definimos la norma según $\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$. Verifique que $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ es la única transformación lineal de $\mathbb{R}^{n\times n}$ a $\mathbb{R}$ para la cual

$$\lim_{A\to 0} \frac{|\det(I+A) - 1 - \operatorname{tr} A|}{\|A\|} = 0$$

donde I es la matriz identidad. En otras palabras, $D\det(I) = \operatorname{tr}$.