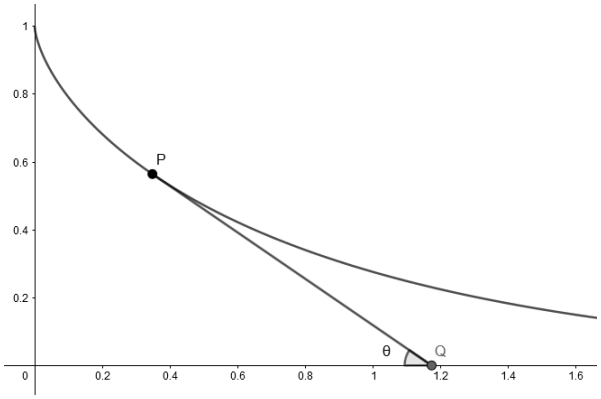
QUIZ 4 - CÁLCULO 3

Nombres:

1. Se dispara un proyectil con una rapidez inicial de 400 m/s en una región plana. Encuentra los posibles ángulos de elevación que se pueden usar para alcanzar un objetivo a 3 km de distancia.

2. La *tractriz* es la curva $\theta \mapsto P(\theta)$ que describe un objeto situado a distancia 1 de otro objeto Q que lo arrastra cuando avanza sobre el eje x. Para ser precisos, tomamos el parámetro $\theta \in (0, \pi/2]$ como el ángulo $\angle PQO$ donde $Q = (t(\theta), 0)$ con condición inicial $t(\pi/2) = 0$



Justifique por qué es razonable definir la curva usando $P(\theta) = (t(\theta) - \cos\theta, \sin\theta)$ donde $t(\theta)$ satisface

$$\frac{\cos\theta}{t'(\theta) + \sin\theta} = -\tan\theta.$$

Despegando $t'(\theta)$ e integrando el resultado se obtiene que

$$t(\theta) = -\ln(\tan(\theta/2))$$

Evalúe la integral que justifica esta última aseveración.

3. Calcule la parametrización de la tractriz en términos de la longitud de la curva a partir de $(0, 1)$.

Solución: $s \mapsto (-\sqrt{1 - e^{-2s}} - \ln(e^s - \sqrt{e^{2s} - 1}), e^{-s})$

4. (Bono) Dado $t > 0$, calcule $\lim_{N\to\infty} \mathbf{r}_N^N$ tal que para $\delta t = t/N$

$$\mathbf{r}_0^N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\mathbf{r}_{n+1}^N - \mathbf{r}_n^N}{\delta t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}_n^N \quad (n \in \{0, 1, \ldots, (N-1)\})$$

Solución: $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$