QUIZ 2 - CÁLCULO 3

Nombres:

1. (*Polinomios de Chebyshev*) Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $T_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Calcule $T_n(x)$ para $n \in \{1, 2, 3\}$ y demuestre que en general $T_n(x)$ es un polinomio de grado n que satisface la recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

2. Calcula el máximo radio r para el cual existe una esfera de radio r contenida en el tetraedro con vértices $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ y $D(0, 0, 3)$.

3. (*Ángulos de Euler*) Considere $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$:

- $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ se obtienen rotando $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ alrededor de $\mathbf{k}$ con ángulo α.
- $\mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}''$ se obtienen rotando $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ alrededor de $\mathbf{i}'$ con ángulo β.
- $\mathbf{i}''', \mathbf{j}''', \mathbf{k}'''$ se obtienen rotando $\mathbf{i}'', \mathbf{j}'', \mathbf{k}''$ alrededor de $\mathbf{k}''$ con ángulo γ.

Halle valores para α, β y γ tales que

$$\mathbf{i}''' = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1, 1, 1\rangle, \quad \mathbf{j}''' = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -1, 0, 1\rangle, \quad \mathbf{k}''' = \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 1, -2, 1\rangle$$

4. (**Bono**) Dado $P \in \mathbb{R}^3$ denotamos por $P_x \in \mathbb{R}^3$ la proyección de P en el plano $\{x = 0\}$, análogamente denotamos por P_y y P_z las proyecciones en los planos $\{y = 0\}$ y $\{z = 0\}$. Demuestre que

$$Area(AOB)^2 = Area(A_xOB_x)^2 + Area(A_yOB_y)^2 + Area(A_zOB_z)^2$$