Cálculo 3 **Parcial 3** **Noviembre del 2019**

- Lea todas las instrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos. Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^{5} P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas. No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Determina si la aseveración es verdadera o falsa y justifica brevemente tu elección. Da un contraejemplo en caso de decir que es falsa.

   1. No existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = i - 1$.
   2. Existe $q \in \mathbb{H}$ tal que $q(i + j + k)\bar{q} = 1$
   3. Para $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ arbitrarios $x \cdot (y \times z) = (x \times y) \cdot z$.
   4. Para $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ arbitrarios $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.
   5. El vector $(1, 2, 3)$ es paralelo al plano $2x + 4y + 6z = 8$.
   6. La ecuación $xy + yz + zx = 0$ representa un hiperboloide en $\mathbb{R}^3$.
   7. En $\mathbb{R}^3$, la intersección de las gráficas $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ está dada por $f(x, y) = g(x, y)$.
   8. La curva $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^3, 2t^3, 3t^3)$ es una recta.
   9. Si $x \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$, entonces $|x(t)|' = |x'(t)|$.
   10. Si $x \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$ es tal que $|x'(t)| \neq 0$ y $T(t) = x'(t)/|x'(t)|$ entonces la curvatura se calcula según $\kappa(t) = |T'(t)|$.
   11. Distintas parametrizaciones de la misma curva dan el mismo vector tangente en un punto dado de la curva.
   12. En $\mathbb{R}^2$

   $$\lim_{r \to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 0 \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

   13. Para toda $f \in C(\mathbb{R}^n)$ y $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado se tiene que $f(C)$ es un conjunto cerrado.
   14. Toda $f \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ alcanza su valor mínimo en algún punto.
   15. Existe $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\partial_x f(x, y) = x + y^2$ y $\partial_y f(x, y) = x - y^2$.
   16. Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si los siguientes límites existen, entonces f es diferenciable en $(0, 0)$

   $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \qquad \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y}$$

   17. Si $f(x, y) = \ln y$ entonces $Df(x, y) = 1/y$.
   18. Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ es tal que $\{\det Df = 0\} = \emptyset$ y x_n se define según

   $$x_0 = 0 \qquad x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1} f(x_n)$$

   entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ existe y $f(x^*) = 0$.
   19. Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ es tal que $\{\det Df = 0\} = \emptyset$ entonces existe $g \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ tal que $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

20. Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^T = A$

$$\sup_{\|x\|<1} x \cdot Ax < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sup_{j=1,\ldots,n} \det(A_j) < 0$$

donde $A_j \in \mathbb{R}^{j\times j}$ tal que $(A_j)_{pq} = A_{pq}$.

21. Para $f \in C(\mathbb{R}^2 \to [0,\infty))$

$$f(x_0, y_0) = \min_x f(x, y_0) = \min_y f(x_0, y) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x_0, y_0) = \min_{x,y} f(x, y)$$

2. Las siguientes ecuaciones determinan una superficie en un entorno de $(x, y, u, v) = (2, -1, 2, 1)$

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$$

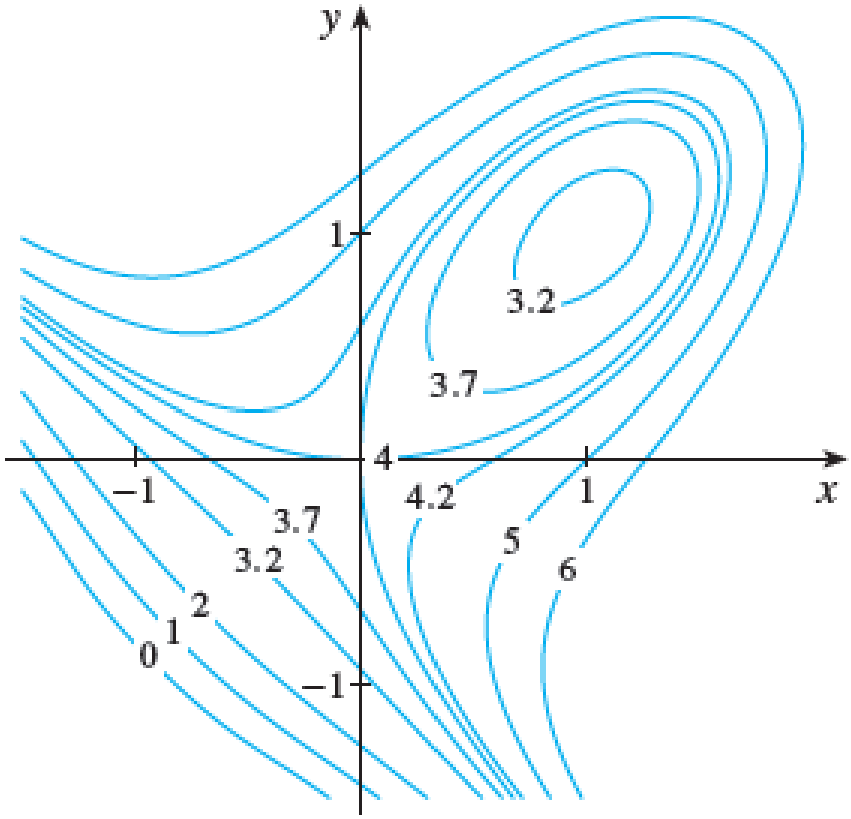
   (I) (+1) Demuestra que es posible parametrizar esta superficie en un entorno de $(2, -1, 2, 1)$ por medio de funciones U y V suaves de la forma $(x, y) \mapsto (x, y, U(x, y), V(x, y))$.

   (II) (+1) Calcula $\partial_x U(2, -1)$.

   (III) (+1) Calcula $\Delta U(2, -1)$.

   (IV) (+1) Demuestra que $(x, y) \mapsto (U(x, y), V(x, y))$ es invertible en un entorno de $(2, -1)$.

3. (+4) Aproxima la ubicación de los puntos críticos de la función escalar $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$ a partir de las curvas de nivel. Determina además si se trata de un mínimo/máximo local o un punto silla



4. (+4) Encuentra el mínimo para cada una de las siguientes funciones objetivo:

   (I) La distancia entre la recta $t \mapsto (1, t, t)$ y la recta $y = x + z = 1$

   (II) El tiempo de viaje para una partícula que va de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, donde la rapidez de la partícula cuando ocupa la posición (x, y) está dada por $v_1 > 0$ si $y \leq 1/2$ o $v_2 > 0$ si $y > 1/2$.

   (III) Dados una serie de n puntos $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, el error $E(m, b) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - mx_j - b)^2$ de aproximar los datos por la recta $y = mx + b$.

   (IV) Dado $m, \delta t > 0$, el total de la energía cinética

   $$K(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\delta t} \right)^2 \delta t$$

   para una trayectoria discreta que va de $x_0 = 0$ a $x_{n+1} = 1$.

   (V) Dado $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $p \in \mathbb{R}^n$, la altura $h(x) = \frac{1}{2}\|Mx\|^2 - p \cdot x$ entre el paraboloide $z = \frac{1}{2}\|Mx\|^2$ y el plano $z = p \cdot x$.
   Pista: Considera por separado los casos $\det M \neq 0$ ó $= 0$.

5. (+4) Demuestra las siguientes desigualdades:

   (I) (Young) Para $p, q \geq 1$ tal que $1/p + 1/q = 1$ y $x, y \in \mathbb{R}$

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

   (II) (Jensen) Para $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexa

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

   Corolarios: Fíjate cuales son las desigualdades famosas que resultan cuando:

   - $f(x) = |x|^{p/q}$ para $p \geq q > 0$ y tomando el cambio de variable $y_j = |x_j|^{1/q}$
   - $f(x) = e^x$ y tomando el cambio de variable $y_j = e^{x_j}$
   - $f(x) = 1/x$ para $x_j > 0$.

   (III) Para $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2)$

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sec\alpha \sec\beta \sec\gamma$$

   (IV) Para a, b, c, d no negativos tales que $a + b + c + d = 1$

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27} abcd$$