Cálculo 3 **Parcial 3** **Octubre del 2019**

- Lea todas las instrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos. Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^{5} P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas. No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

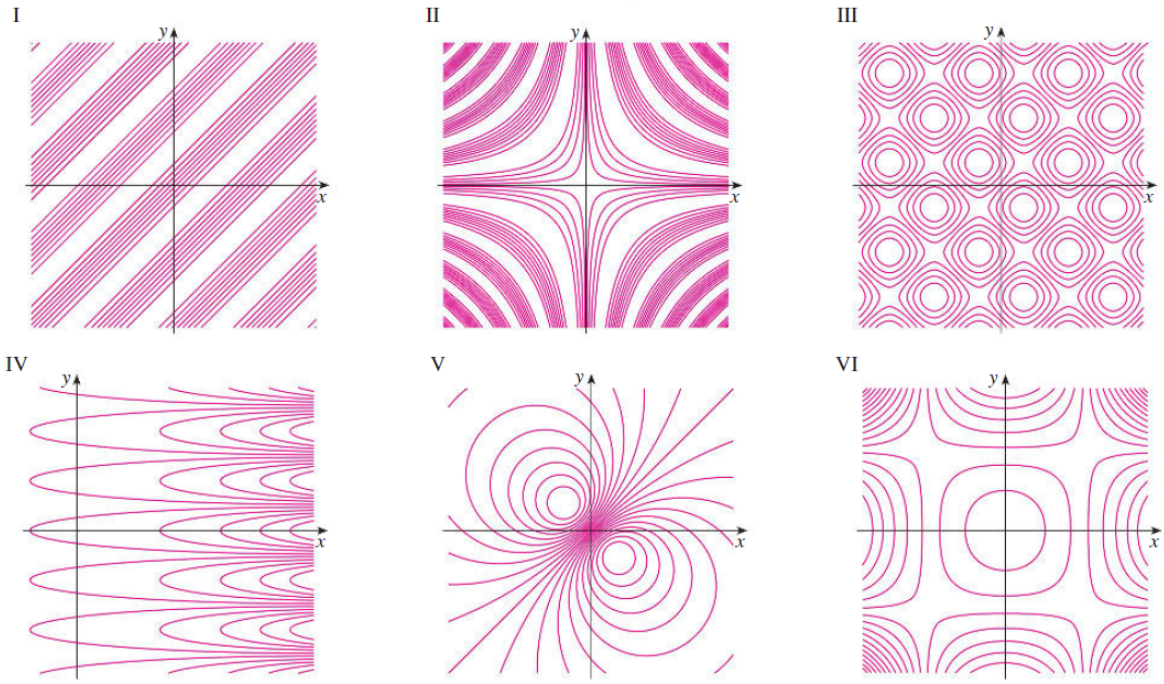
Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Empareja la función can la gráfica de conjuntos de nivel que le corresponde

   1. $z = \sin(xy)$
   2. $z = \sin(x - y)$
   3. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$
   4. $z = e^x \cos y$
   5. $z = \sin x - \sin y$
   6. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$



Respuesta(s):

II, I, VI, IV, III, V

2. (+4) Calcula el límite en caso de que exista

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy) - xy}{x^2 + y^2}$$

Respuesta(s):

El límite es 0 usando la expansión de Taylor de segundo orden.

3. (+4) Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva en la que se intersectan la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cono $xy + yz + zx = 0$ en el punto $(0, 0, 1)$.

Respuesta(s):

El plano tangente a la esfera es $z = 1$. El plano tangente al cono es $x + y = 0$. La intersección es la recta $(x(t), y(t), z(t)) = (t, -t, 1)$.

4. (+4) Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que $f(x, y) = g(u, v)$ donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. Verifica que

$$\Delta f(x, y) = 4\sqrt{u^2 + v^2}\Delta g(u, v)$$

Respuesta(s):

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= 2x\partial_u g + 2y\partial_v g \\
\partial_x^2 f &= 4x^2\partial_u g + 8xy\partial_{uv}^2 g + 4y^2\partial_v^2 g + 2\partial_u g \\
\partial_y f &= -2y\partial_u g + 2x\partial_v g \\
\partial_y^2 f &= 4y^2\partial_u^2 g - 8xy\partial_{uv}^2 g + 4x^2\partial_v^2 g - 2\partial_u g \\
\Delta f &= 4(x^2 + y^2)\Delta g
\end{aligned}$$

Finalmente sustituimos $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$ en $\sqrt{u^2 + v^2}$ y verificamos la identidad deseada.

5. (I) (+2) Sea $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $f(A) = A^2$. Dado $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, demuestre que $Df(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ dado por $Df(A)B = AB + BA$ es la única transformación lineal tal que

$$\lim_{H\to 0} \frac{\|f(A+H) - f(A) - Df(A)H\|}{\|H\|} = 0$$

donde $\|M\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}^2}$.

(II) (+2) Diseñe un método iterativo que aproxime $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} \text{ con } A \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Respuesta(s):

(I) $B \mapsto Df(A)B = AB + BA$ es lineal dado que el producto de matrices es una operación lineal.

Por la propiedad distributiva

$$f(A+H) - f(A) - Df(A)H = (A+H)^2 - A^2 - AH - HA = H^2$$

Por Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned} \|H^2\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} H_{ik}H_{kj} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} H_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} H_{kj}^2 \right) = \left(\sum_{i,k=1}^{n} H_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j,k=1}^{n} H_{kj}^2 \right) = \|H\|^4 \end{aligned}$$

Por lo tanto el cociente en el límite que consideramos está acotado por $\|H\|$ y tiende a cero como esperábamos.

Si $\overline{Df(A)} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es lineal tal que

$$\lim_{H\to 0} \frac{\|f(A+H) - f(A) - \overline{Df(A)}H\|}{\|H\|} = 0$$

entonces por la desigualdad triangular

$$\lim_{H\to 0} \frac{\|Df(A)H - \overline{Df(A)}H\|}{\|H\|} = 0$$

Si sustituimos $H = \varepsilon B$ en esta identidad concluímos que $Df(A)B = \overline{Df(A)}B$ lo cual establece la unicidad de la derivada.

(II) Gracias al método de Newton para

$$f(A) = A^2 - \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad Df(A)B = AB + BA$$

obtenemos

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_{n+1} = A_n - Df(A_n)^{-1} f(A_n)$$

Equivalentemente debemos resolver en cada paso para H_n

$$A_n H_n + H_n A_n = A_n^2 - \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

para luego tomar $A_{n+1} = A_n - H_n$.

La ecuación lineal $AH + HA = B$ es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 2A_{11} & A_{21} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} + A_{22} & 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 & A_{11} + A_{22} & A_{21} \\ 0 & A_{21} & A_{12} & 2A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} \\ H_{12} \\ H_{21} \\ H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix}$$

que podemos resolver por el método de Gauss-Jordan.