

- Lea todas las instrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos.
Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^5 P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas.
No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Calcule los siguientes límites (en caso de que existan)

(I)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

(II)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

(III)

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

(Definimos $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ (chico) existe $R > 0$ (grande) tal que $|x| > R$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$).

(IV)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1+x)^{1+y} - 1 - x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(V) $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable de segundo orden

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} (u(r \cos \theta, r \sin \theta) - u(0, 0)) d\theta$$

Respuesta(s):

(I) 0

(II) No existe (racionalice)

(III) No existe

(IV) 0

(V) $\pi \Delta u(0)$

2. (+4) Calcule el plano tangente en cada caso

(I) $z = 2x^2 + y^2 - 5y$ en $(1, 2, -4)$.

(II) $z = e^{x-y}$ en $(2, 2, 1)$.

(III) $xy + yz + zx = 5$ en $(1, 2, 1)$.

(IV) Al paraboloide $z = x^2 + xy + y^2$ y paralelo al plano $x + y + z = 0$.

(V) Al elipsoide $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 4 + 2xy + 2yz + 2zx$ y paralelo al plano xy (dos soluciones).

Respuesta(s):

(I) $z = -4 + 4(x - 1) - (y - 2) = -6 + 4x - y$

(II) $z = 1 + (x - 2) - (y - 2) = 1 + x - y$

(III) $3x + 2y + 3z = 16$

(IV) $x + y + z = -1/3$

(V) $z = \pm\sqrt{2}$

3. (+4) Verifique que las siguientes funciones satisfacen la ecuación diferencial correspondiente:¹:

(I) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad \Delta u = 0$$

(II) $x \in \mathbb{R}$

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t) \quad \Rightarrow \quad \partial_t^2 u = \Delta u$$

(III) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$u(x, y, t) = u_0((\cos t)x + (\sin t)y, (\cos t)y - (\sin t)x) \quad \Rightarrow \quad \partial_t u = y\partial_x u - x\partial_y u$$

(IV)

$$u(t) = \int_0^t f(s) \sin(t - s) ds \quad \Rightarrow \quad u'' + u = f(t)$$

(V) $x \in \mathbb{R}$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-(x-y)^2/(4t)} dy \quad \Rightarrow \quad \partial_t u = \Delta u$$

Respuesta(s):

(I)-(V) Regla de la cadena y un poco de calma.

(IV) Regla de la cadena: $u(t) = \phi(t, t)$ donde

$$\phi(x, y) = \int_0^x f(s) \sin(y - s) ds$$

¹En caso de tener $u = u(x, t)$ calculamos Du y Δu en términos de las variables espaciales exclusivamente

$$Du(x, t) = (\partial_{x_1} u(x, t), \dots, \partial_{x_n} u(x, t)), \quad \Delta u(x, t) = \partial_{x_1}^2 u(x, t) + \dots + \partial_{x_n}^2 u(x, t)$$

4. (+4) Verifique las siguientes identidades:

(I) $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x) = v(\lambda x) \quad \Rightarrow \quad \Delta u(x) = \lambda^2 \Delta v(\lambda x)$$

y en general

$$u(x) = v(Ax) \quad \Rightarrow \quad \Delta u(x) = \text{tr}(A^T D^2 v(Ax) A)$$

(II) $x \in \mathbb{R}^n$ y $r = |x|$

$$u(x) = v(r) \quad \Rightarrow \quad \Delta u = v'' + (n-1)r^{-1}v'$$

y en general si $u(x) = r^\alpha v(r)$ (es decir que u es una función homogénea de orden α) entonces

$$\Delta u = r^\alpha v'' + (n-1+2\alpha)r^{\alpha-1}v' + \alpha(\alpha+n-2)r^{\alpha-2}v$$

(III) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$u(x, y, t) = u_0((\cosh t)x + (\sinh t)y, (\sinh t)x + (\cosh t)y) \quad \Rightarrow \quad \partial_t u = y\partial_x u + x\partial_y u$$

y en general se tiene que si $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son tales que $\partial_t \phi(x, t) = v(\phi(x, t))$ (es decir que ϕ es el flujo que genera la ecuación diferencial $x' = v(x)$)

$$u(x, t) = u_0(\phi(x, t)) \quad \Rightarrow \quad \partial_t u = v \cdot Du$$

(IV) (Trasformada de Kelvin) $x \in \mathbb{R}^n$ y $r = |x|$

$$u(x) = r^{-(n-2)}v(r^{-2}x) \quad \Rightarrow \quad \Delta u(x) = r^{-(n+2)}\Delta v(r^{-2}x)$$

(V) (Trasformada de Cole-Hopf) $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y $u(x, t) = e^{-v(x, t)}$

$$\partial_t v + |Dv|^2 = \Delta v \quad \Rightarrow \quad \partial_t u = \Delta u$$

Respuesta(s):

(I)-(V) Regla de la cadena y un poco de calma.

5. (+4) (Problem Plus 14.6) Adapte el método de Newton para aproximar las soluciones del sistema

$$x^x + y^y = 1000 \quad x^y + y^x = 100$$

Respuesta(s):

Se implementó en la ayudantía.