

- Lea todas las instrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos.
Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^5 P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas.
No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Empareja la función con la gráfica de conjuntos de nivel que le corresponde

1. $z = \sin(xy)$

4. $z = e^x \cos y$

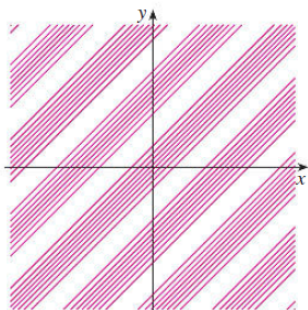
2. $z = \sin(x - y)$

5. $z = \sin x - \sin y$

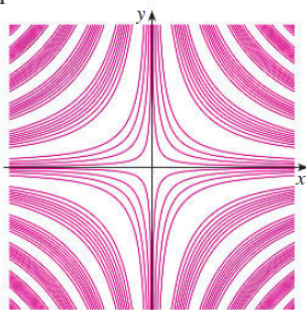
3. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

6. $z = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

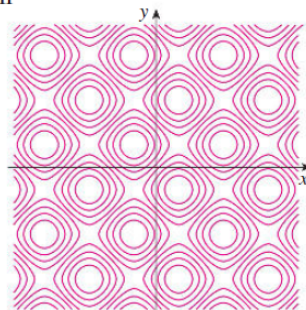
I



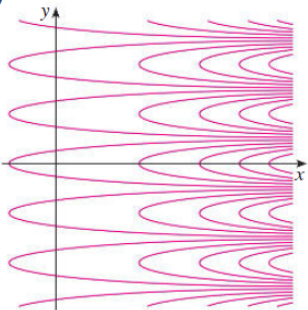
II



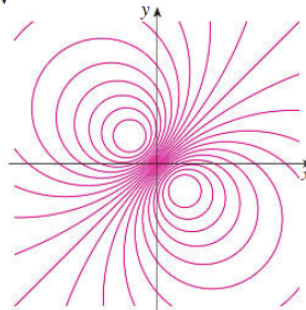
III



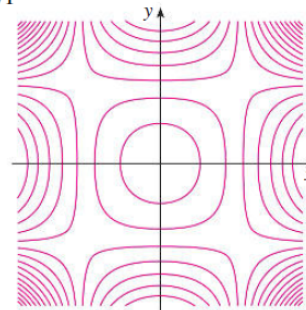
IV



V



VI



2. (+4) Calcula el límite en caso de que exista

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy) - xy}{x^2 + y^2}$$

3. (+4) Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva en la que se intersectan la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cono $xy + yz + zx = 0$ en el punto $(0, 0, 1)$.

4. (+4) Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que $f(x, y) = g(u, v)$ donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. Verifica que

$$\Delta f(x, y) = 4\sqrt{u^2 + v^2} \Delta g(u, v)$$

5. (I) (+2) Sea $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $f(A) = A^2$. Dado $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, demuestre que $Df(A) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ dado por $Df(A)B = AB + BA$ es la única transformación lineal tal que

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\|f(A+H) - f(A) - Df(A)H\|}{\|H\|} = 0$$

donde $\|M\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n M_{ij}^2}$.

- (II) (+2) Diseñe un método iterativo que aproxime $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} \text{ con } A \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$