Cálculo 3 **Parcial 3** **Octubre del 2019**

- Lea todas las instrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos.
  Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^{6} P_i - \min_{1 \leq i < j < k \leq 6} (P_i + P_j + P_k)$$

- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas.
  No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

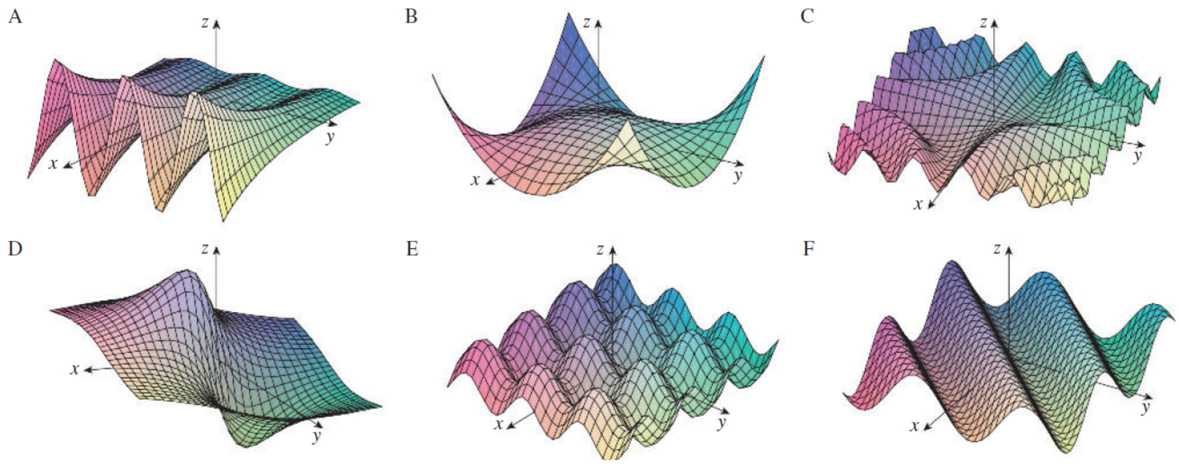
Nombre completo: ____________________

Problema:	1	2	3	4	5	6	Total
Valor:	4	4	4	4	4	4	12
Puntaje:							

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Empareja la función con la gráfica que le corresponde

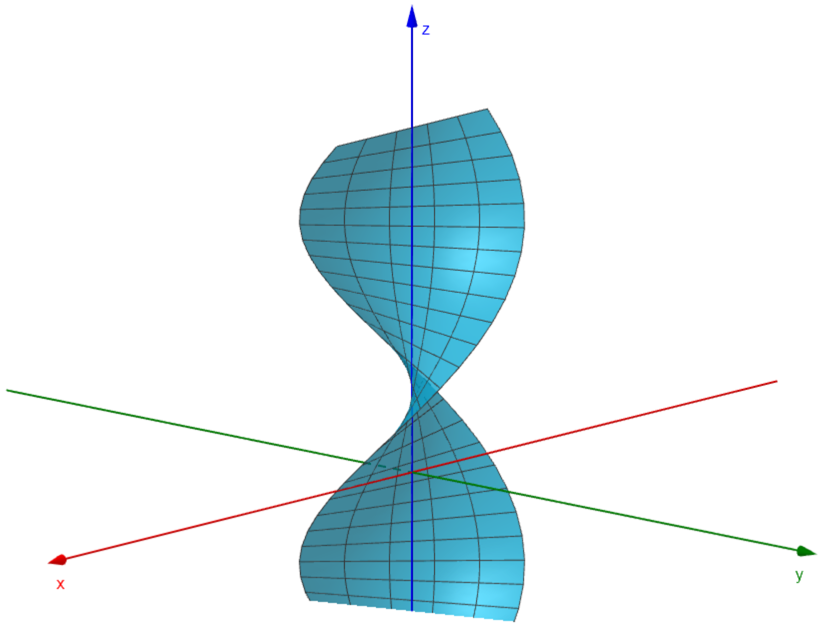
   1. $z = \sin(xy)$
   2. $z = \sin(x - y)$
   3. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$
   4. $z = e^x \cos y$
   5. $z = \sin x - \sin y$
   6. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$



Respuesta(s):

C, F, B, A, E, D

2. (+4) Calcula la ecuación del plano tangente en el origen a la superficie S que la unión de los segmentos que van de $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ a $(-\cos t, -\operatorname{sen} t, t)$ para $t \in \mathbb{R}$.



Respuesta(s):

$y = 0$

3. Para cada caso escribe la identidad que resulta al aplicar la regla de la cadena y da un ejemplo ilustrativo:[1]

   (I) (+2) $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ es una curva y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función escalar, ambas diferenciables.

   (II) (+2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones escalares y diferenciables.

   Cuidado: Revisa bien el orden de la composición.

[1]Por ejemplo, si el enunciado te plantea "$f : (a,b) \to (c,d)$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ diferenciables" una respuesta aceptable es decir que $h = g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable tal que para todo $x \in (a,b)$ se tiene que,

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Un ejemplo puede ser $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(y) = y^2$ tal que para $h(x) = g \circ f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ se tiene que

$$h'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

4. (+4) Verifica que si $u(x,y) = v(r,\theta)$ donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ es la representación en coordenadas polares, entonces[2]

$$\|Du\|^2 = Dv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} Dv^T$$

[2]Asumimos que $Du = Du(x,y) = (\partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y))$ y $Dv = Dv(r,\theta) = (\partial_r v(r,\theta), \partial_\theta v(r,\theta))$ son matrices 1 por 2, es decir vectores tipo fila. También

$$\|Du\|^2 := (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2$$

5. (+4) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con derivadas continuas tales que

$$u(x,t) = \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy$$

Verifica que u satisface la ecuación de onda

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$$

Respuesta(s):

Por la regla de la cadena aplicada a $u(x,t) = \phi(x+t, x-t)$ donde

$$\phi(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\alpha} f(y)dy$$

6. (I) (+2) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i2xy$$

Dado $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, demuestre que $f'(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dado por

$$f'(z_0)z = 2z_0 z = (2x_0x - 2y_0y) + i(y_0x + x_0y) \qquad (z = x+iy)$$

es la única transformación lineal tal que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\|f(z_0+z) - f(z_0) - f'(z_0)z\|}{\|z\|} = 0$$

donde $\|x+iy\| := \sqrt{x^2+y^2}$.

(II) (+2) Diseñe un método iterativo que aproxime la raíz de $z^2 = 9+i$ con parte real positiva.

Respuesta(s):

(I) $z \mapsto Df(z_0)z = 2z_0z$ es claramente lineal tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$.

Por propiedades de la norma

$$\|f(z_0+z) - f(z_0) - Df(z_0)z\| = \|(z_0z)^2 - z_0^2 - 2z_0z\| = \|z^2\| = \|z\|^2$$

Por lo tanto el límite que consideramos tiende a cero como esperábamos.

Si $\widetilde{Df(z_0)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es lineal tal que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\|f(z_0+z) - f(z_0) - \widetilde{Df(z_0)}z\|}{\|z\|} = 0$$

entonces por la desigualdad triangular

$$\lim_{z\to 0} \frac{\|Df(z_0)z - \widetilde{Df(z_0)}z\|}{\|z\|} = 0$$

Si sustituimos $z = \varepsilon\zeta$ en esta identidad concluímos que $Df(z_0)\zeta = \widetilde{Df(z_0)}\zeta$ lo cual establece la unicidad de la derivada.

(II) Gracias al método de Newton para

$$f(z) = z^2 - 9 - i, \qquad Df(z_0)z = 2z_0z$$

obtenemos

$$z_0 = 3, \qquad z_{n+1} = z_n - Df(z_n)^{-1}f(z_n) = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{9+i}{z_n}\right)$$