Cálculo 3 **Parcial 2** **Octubre del 2019**

- Lea todas las intrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos. Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^{5} P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

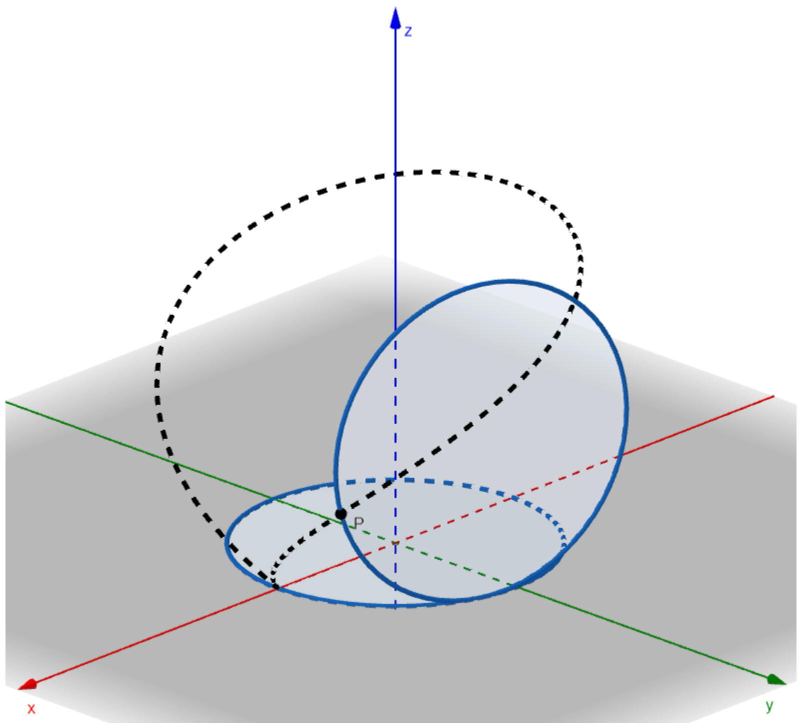
- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas. No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: ______________________

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Dé una parametrización para la curva que traza un punto P en una circunferencia (vertical) de radio 1 que rueda sin deslizar sobre la circunferencia (horizontal) $\{x^2+y^2 = 1, z = 0\}$



Respuesta(s):

Dado $A = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ el punto de contacto, $C = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$ el centro de la circunferencia vertical y $k = (0, 0, 1)$ la proyección de C en el eje vertical; tenemos que $P = P(\theta)$ se obtiene rotando A alrededor del eje Ck con ángulo θ. Es decir

$$CP = \cos\theta CA + \operatorname{sen}\theta(Ck \times CA) = (\operatorname{sen}^2\theta, -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, -\cos\theta)$$

Por lo tanto

$$P(\theta) = (\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta, \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta, 1 - \cos\theta)$$

2. (+4) Determine cuál de las siguientes curvas que unen los puntos $A = \langle 1, 0, 0\rangle$ y $B = \langle -1, 0, 1\rangle$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$:

   1. La hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), t\rangle$ para $t \in [0, 1]$.
   2. Una de las semi-elipses que se obtiene al intersectar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + 2z = 1$.

   tiene menor longitud.

Respuesta(s):

La hélice tiene longitud $\sqrt{\pi^2 + 1}$.

La semi-elipse se puede parametrizar por

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t, \qquad z(t) = \frac{1 - \cos t}{2}, \qquad t \in [0, \pi]$$

y calculamos así la longitud $\int_0^\pi \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t/4}\; dt$.

Esta última integral también mide la longitud de la curva $t \mapsto (t, \cos t/2)$ que une los puntos $(0, 1/2)$ y $(\pi, -1/2)$. El segmento de línea recta minimiza la longitud entre todas las curvas que unen estos puntos. Por suerte tenemos que este segmento mide $\sqrt{\pi^2 + 1}$ lo cual establece la desigualdad deseada.

3. (+4) Determine el ángulo de elevación $\alpha \in (0, \pi/2)$ con que se debe disparar un proyectil para que maximize su alcance horizontal si su rapidez inicial es de $200\,\mathrm{m/s}$. Asuma que la única fuerza que actúa es la de gravedad (no hay resistencia del aire).

Respuesta(s):

$\alpha = \pi/4$. Ver Ejemplo 5 en Stewart (pp. 872-873).

4. (+4) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$, $\delta t > 0$ y $v_{n+1/2} := (x_{n+1} - x_n)/\delta t$. Demuestre que si

$$\frac{v_{n+1/2} - v_{n-1/2}}{\delta t} = -1$$

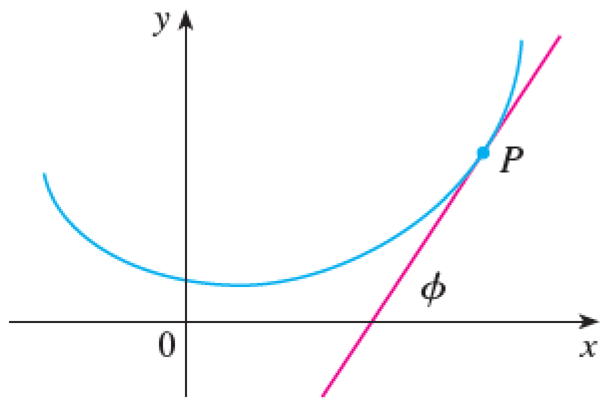
entonces $E := v_{n+1/2}^2 + x_{n+1} + x_n$ es una constante independiente de n.

Respuesta(s):

$$\begin{aligned}(v_{n+1/2}^2 + x_{n+1} + x_n) - (v_{n-1/2}^2 + x_n + x_{n-1}) &= (v_{n+1/2} - v_{n-1/2})(v_{n+1/2} + v_{n-1/2}) + (x_{n+1} - x_{n-1}) \\ &= (-\delta t)\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{\delta t} + (x_{n+1} - x_{n-1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

5. Sea $\mathbf{r} = (x, y) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva suave, cerrada y parametrizada por la longitud de arco, es decir que $|\mathbf{r}'|^2 = (x')^2 + (y')^2 = 1$ y además $\mathbf{r}$ junto con todas sus derivadas son iguales en $s = 0$ y $s = 1$.

   (I) (+2) Demuestre que la curvatura de $\mathbf{r}$ se puede calcular usando $\kappa = |\phi'|$ donde ϕ es el ángulo que forma la recta tangente a la curva con el eje x.



   (II) (+2) Demuestre que

$$\int_0^1 \kappa(s)ds \geq 2\pi$$

Respuesta(s):

(i) Recordemos que como $\mathbf{r}$ está parametrizada por longitud de arco

$$\kappa = |\mathbf{T}'| = |\mathbf{r}''| = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2}$$

como $(x', y') = \pm(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$ se tiene que

$$(x'', y'') = \pm\phi'(-\operatorname{sen}\phi, \cos\phi) \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = |\phi'|$$

(ii) Por la desigualdad triangular

$$\int_0^1 \kappa(s)ds \geq \left|\int_0^1 \phi'(s)ds\right|$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que $\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \phi'(s)ds$ cuenta el número de vueltas que da el vector (x', y') en el sentido opuesto de las manecillas del reloj. Como $\int_0^1 \kappa(s)ds > 0$ se tiene que necesariamente $\int_0^1 \kappa(s)ds \geq 2\pi$.