

- Lea todas las instrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos.
Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^5 P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas.
No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

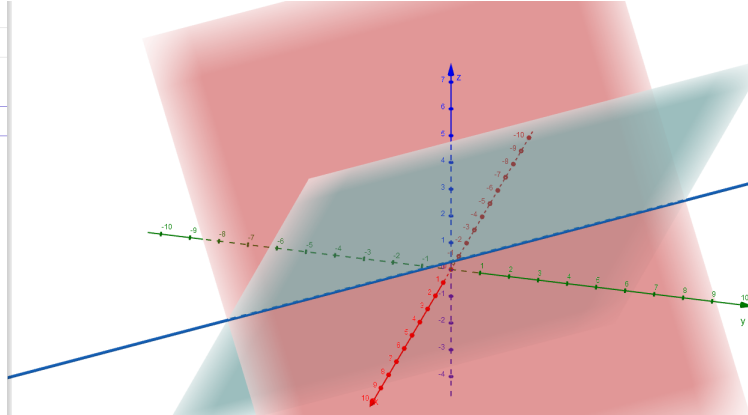
1. (+4) Grafique y dé una parametrización para cada una de las curvas en $\mathbb{R}^3$ que se obtienen a partir de la intersección del plano $x + y + z = 1$ con cada una de las siguientes superficies:

1. El plano $x + y = z$
2. La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
3. El cilindro $x^2 + y^2 = 1$
4. El cono con vértice $V = (0, 0, 2)$, dirección $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ y ángulo $\pi/4$
5. El cono $y^2 = 4xz$

Respuesta(s):

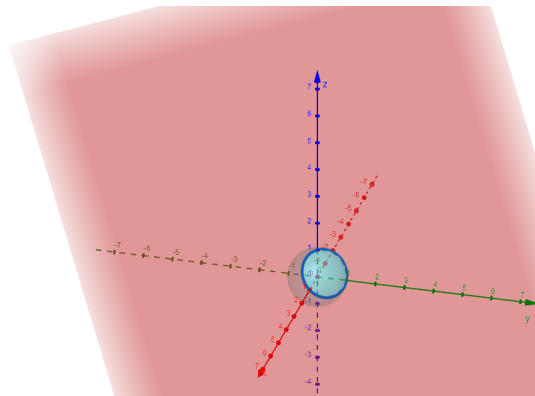
1.

```
eq1 : x + y + z = 1
eq2 : x + y = z
f : IntersectPath(eq1, eq2)
→ X = (0.25, 0.25, 0.5) + λ (-2, 2, 0)
```



2.

```
eq1 : x + y + z = 1
eq2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1
f : IntersectPath(eq1, eq2)
→ X = (0.33, 0.33, 0.33) + (-0.58 cos(λ) + 0.33 sin(λ), 0.58 cos(λ) + 0.33 sin(λ), -0.67 sin(λ))
```

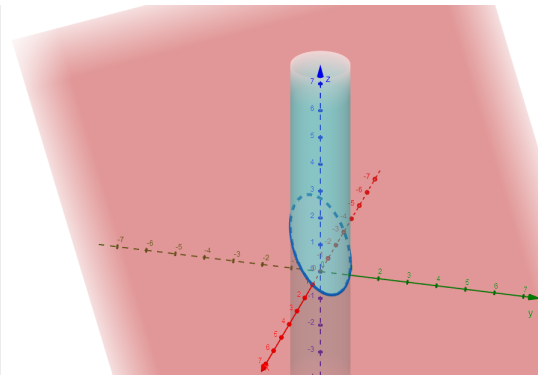


3.

```

eq1 : x + y + z = 1
eq2 : x^2 + y^2 = 1
--> x^2 + y^2 + 0z^2 = 1
f : IntersectPath(eq1, eq2)
--> X = (0, 0, 1) + (0.71 cos(k) + 0.71 sin(k), 0.71 cos(k) - 0.71 sin(k), -1.41 cos(k))
Input...

```

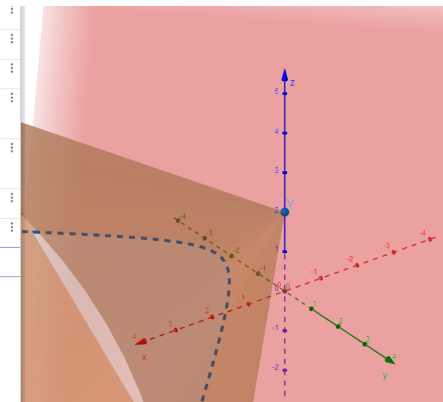


4.

```

eq1 : x + y + z = 1
V = (0, 0, 2)
A = (9, 0, 0)
a : Cone(A, V, 9)
--> 782.03
d : IntersectPath(eq1, a)
--> X = (0.29, -0.55, 1.26) + (± 0.78 cosh(t) - 0.1 sinh(t), ± 0.27 cosh(t) + 0.57 sinh(t), ± 0.51 cosh(t) - 0.46 sinh(t))
B = (9.18, -8.96, 0.79)
C = (7.12, 2.36, -8.48)

```

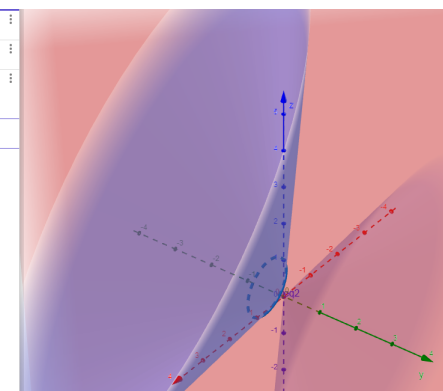


5.

```

eq1 : x + y + z = 1
eq2 : 4y^2 = xz
c : IntersectPath(eq1, eq2)
--> X = (0.53, -0.07, 0.53) + (-0.52 cos(t) - 0.13 sin(t), 0.27 sin(t), 0.52 cos(t) - 0.13 sin(t))
|

```



También se parametriza con $(x, y, z) = (t^2, 2t(1 - t), (1 - t)^2)$

2. (+4) Calcule cada una de las siguientes derivadas:

1. $U(t) = |r(t)|^\alpha$ para $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable.
2. $T(t) = v(t)/|v(t)|$ para $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable.
3. $L(t) = r(t) \times r'(t)$ para $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable de segundo orden.
4. $B(t) = T(t) \times N(t)$ tal que $T, N : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables y satisfacen

$$|T| = |N| = 1, \quad T \perp N, \quad T' = \kappa N, \quad N' = \tau B - \kappa T$$

para algún $\kappa, \tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

5. $\bar{r}(t) = Rot_{u,\alpha}(r(t))$ donde $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable y $Rot_{u,\alpha}$ es la rotación de ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$ alrededor de $u \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario.

Respuesta(s):

1. $U'(t) = \alpha |r(t)|^{\alpha-2} r(t) \cdot r'(t)$
2. $T'(t) = v'(t)/|v(t)| - (v(t) \cdot v'(t)/|v(t)|^3)v(t)$
3. $L'(t) = r(t) \times r''(t)$
4. $B'(t) = -\tau N(t)$
5. $\bar{r}'(t) = Rot_{u,\alpha}(r'(t))$

3. (+4) Calcule la parametrización longitud de arco para cada una de las siguientes curvas a partir de $t = 0$:
1. Hélice: $r(t) = (A \cos(\omega t), A \sin(\omega t), Bt)$ para $A > 0$ y $\omega \neq 0$
 2. Parábola: $r(t) = (t, t^2)$
 3. Catenaria: $r(t) = (2t, e^t + e^{-t})$
 4. Cicloide: $r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$
 5. Espiral cónica: $r(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$

Respuesta(s):

1. $\bar{r}(s) = (A \cos(\omega \mu s), A \sin(\omega \mu s), B \mu s)$ con $\mu = 1/\sqrt{A^2 \omega^2 + B^2}$.

2. $\bar{r}(s) = (t(s), t(s)^2)$ donde $t(s)$ es la función inversa de

$$s(t) = (t/2)\sqrt{1+4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1+4t^2})/4$$

3. $\bar{r}(s) = \left(2 \ln \left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right), \sqrt{s^2+4}\right)$

4. $\bar{r}(s) = \left(2 \arccos(1 - s/4) - 2(1 - s/4)\sqrt{1 - (1 - s/4)^2}, 2 - 2(1 - s/4)^2\right)$

5. $\bar{r}(s) = (t(s) \cos(t(s)), t(s) \sin(t(s)), t(s))$ donde $t(s)$ es la función inversa de

$$s(t) = \frac{t\sqrt{t^2+2}}{2} + \ln(t + \sqrt{t^2+2}) - \ln \sqrt{2}$$

4. (+4) Calcule el término general para cada una de las siguientes recurrencias para $\delta t \neq 0$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión arbitraria:

1. $x_0 = 0, x_{n+1} = x_n + \delta t f_n$
2. $x_0 = 0, x_{n+1} = (1 + \delta t)x_n + \delta t f_n$
3. $x_0 = x_1 = 1, x_{n+1} - (2 - \delta t^2)x_n + x_{n-1} = 0$
4. $x_0 = x_1 = 0, x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = f_n$

Respuesta(s):

1. Suma de Riemann:

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \delta t$$

2.

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1} f_j (1 + \delta t)^{n-j-1} \delta t$$

3.

$$x_n = \operatorname{Re}(Az^n), \quad z = (1 - \delta t^2/2) + i\delta t\sqrt{1 - \delta t^2/4}, \quad A = 1 - \frac{i\delta t}{\sqrt{4 - \delta t^2}}$$

4.

$$x_n = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)f_j$$

5. (+4) Encuentre la región del espacio cuyos puntos se pueden alcanzar cuando se dispara un proyectil desde el origen con rapidez inicial 1.

Respuesta(s):

Conjetura: Usamos las posiciones donde se logra la máxima altura $(0, 1/(2g))$ y el máximo alcance vertical $x^2 + y^2 = 1/g^2$ para llegar a que la región pueda ser

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2gz \leq 1 - g^2r^2, r^2 = x^2 + y^2\}$$

Toda trayectoria está contenida en S : Para $v_r^2 + v_z^2 \leq 1$

$$r = v_r t, \quad z = v_z t - \frac{g}{2} t^2$$

Si $v_r = 0$ la trayectoria es vertical y el enunciado se sigue por la construcción de S . Si no lo que hace falta demostrar es que

$$\frac{v_z}{v_r} r - \frac{g}{2v_r^2} r^2 \leq \frac{1}{2g} - \frac{g}{2} r^2 \quad \forall r \geq 0$$

equivalentemente $Ar^2 + Br + C \geq 0$ para todo $r \geq 0$ donde

$$A = \frac{g}{2} \left(\frac{1}{v_r^2} - 1 \right) \geq 0, \quad B = -\frac{v_z}{v_r}, \quad C = \frac{1}{2g} > 0$$

Es fácil ver que esta desigualdad se cumple dado que el discriminante $B^2 - 4AC = 0$.

Para todo $(x_0, y_0, z_0) \in S$ existe una trayectoria que pasa por este punto:

Sea $(r_0 \cos \alpha, r_0 \sin \alpha) = (x_0, y_0)$ las coordenadas polares. Basta ver que ahora que existe una solución con $t \geq 0$ y $v_r^2 + v_z^2 \leq 1$ para

$$r_0 = v_r t, \quad z_0 = v_z t - \frac{g}{2} t^2$$

equivalentemente

$$r_0^2 + \left(z_0 + \frac{g}{2} t^2 \right)^2 \leq t^2$$

Basta ver que la cuadrática en t^2 tiene una raíz positiva

$$(t^2)_{\pm} = \frac{z_0 g - 1 \pm \sqrt{(z_0 g - 1)^2 - g^2(r_0^2 + z_0^2)}}{g^2/2}$$

esto se cumple si el discriminante es positivo lo cual se tiene porque el punto pertenece a S .