Cálculo 3 **Parcial 2 (Práctica)** **Septiembre del 2019**

- Lea todas las intrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos. Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^{5} P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas. No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Grafique y dé una paramétrización para cada una de las curvas en $\mathbb{R}^3$ que se obtienen a partir de la intersección del plano $x+y+z=1$ con cada una de las siguientes superficies:

    1. El plano $x+y=z$
    2. La esfera $x^2+y^2+z^2=1$
    3. El cilindro $x^2+y^2=1$
    4. El cono con vértice $V=(0,0,2)$, dirección $\mathbf{i}=\langle 1,0,0\rangle$ y ángulo $\pi/4$
    5. El cono $y^2=4xz$

2. (+4) Calcule cada una de las siguientes derivadas:

   1. $U(t) = |r(t)|^\alpha$ para $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable.
   2. $T(t) = v(t)/|v(t)|$ para $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable.
   3. $L(t) = r(t) \times r'(t)$ para $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ diferenciable de segundo orden.
   4. $B(t) = T(t) \times N(t)$ tal que $T, N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son diferenciables y satisfacen

      $$|T| = |N| = 1, \quad T \perp N, \quad T' = \kappa N, \quad N' = \tau B - \kappa T$$

      para algún $\kappa, \tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   5. $\bar{r}(t) = Rot_{u,\alpha}(r(t))$ donde $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable y $Rot_{u,\alpha}$ es la rotación de ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$ alrededor de $u \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario.

3. (+4) Calcule la parametrización longitud de arco para cada una de las siguientes curvas a partir de $t = 0$:

   1. Hélice: $r(t) = (A\cos(\omega t), A\sin(\omega t), Bt)$ para $A > 0$ y $\omega \neq 0$
   2. Parábola: $r(t) = (t, t^2)$
   3. Catenaria: $r(t) = (2t, e^t + e^{-t})$
   4. Cicloide: $r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$
   5. Espiral cónica: $r(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$

4. (+4) Calcule el término general para cada una de las siguientes recurrencias para $\delta t \neq 0$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una suceción arbitraria:

   1. $x_0 = 0$, $x_{n+1} = x_n + \delta t f_n$
   2. $x_0 = 0$, $x_{n+1} = (1 + \delta t)x_n + \delta t f_n$
   3. $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+1} - (2 - \delta t^2)x_n + x_{n-1} = 0$
   4. $x_0 = x_1 = 0$, $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = f_n$

5. (+4) Encuentre la región del espacio cuyos puntos se pueden alcanzar cuando se dispara un proyectil desde el origen con rapidez inicial 1.