Cálculo 3 **Parcial 2** **Octubre del 2019**

- Lea todas las intrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos. Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^{5} P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

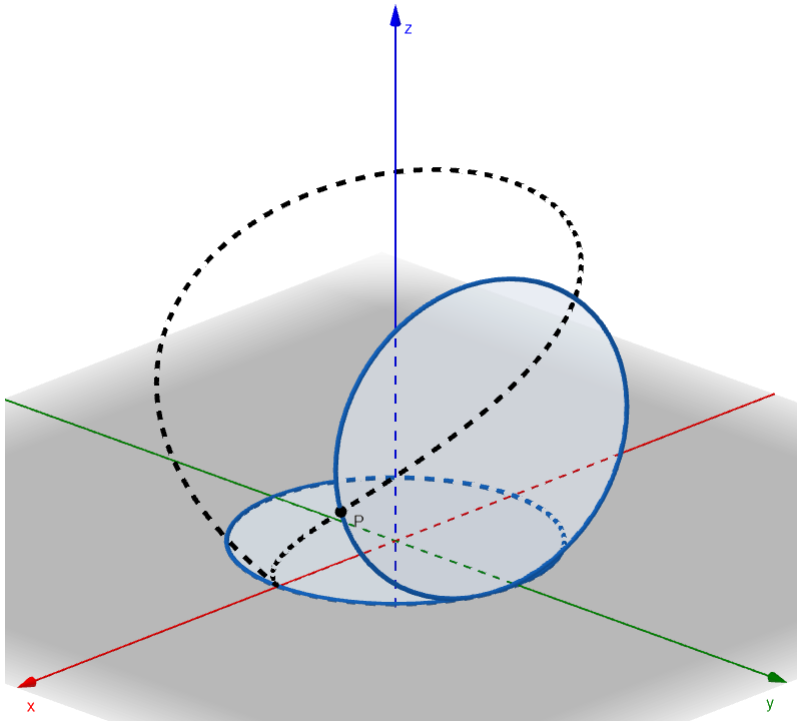
- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas. No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Dé una parametrización para la curva que traza un punto P en una circunferencia (vertical) de radio 1 que rueda sin deslizar sobre la circunferencia (horizontal) $\{x^2+y^2 = 1, z = 0\}$



2. (+4) Determine cuál de las siguientes curvas que unen los puntos $A = \langle 1, 0, 0\rangle$ y $B = \langle -1, 0, 1\rangle$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$:

   1. La hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), t\rangle$ para $t \in [0, 1]$.
   2. Una de las semi-elipses que se obtiene al intersectar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + 2z = 1$.

   tiene menor longitud.

3. (+4) Determine el ángulo de elevación $\alpha \in (0, \pi/2)$ con que se debe disparar un proyectil para que maximize su alcance horizontal si su rapidez inicial es de $200\,\mathrm{m/s}$. Asuma que la única fuerza que actúa es la de gravedad (no hay resistencia del aire).

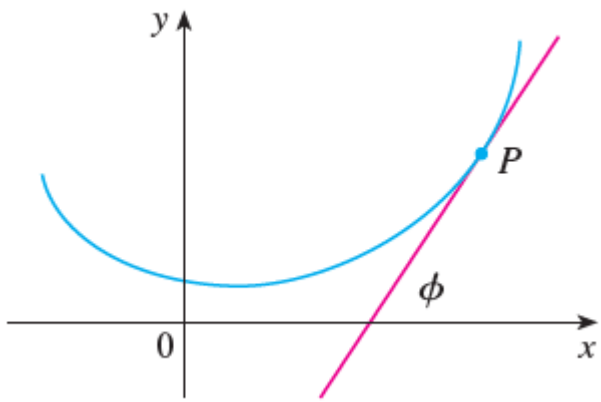
4. (+4) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$, $\delta t > 0$ y $v_{n+1/2} := (x_{n+1} - x_n)/\delta t$. Demuestre que si

$$\frac{v_{n+1/2} - v_{n-1/2}}{\delta t} = -1$$

entonces $E := v_{n+1/2}^2 + x_{n+1} + x_n$ es una constante independiente de n.

5. Sea $\mathbf{r} = (x, y) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva suave, cerrada y parametrizada por la longitud de arco, es decir que $|\mathbf{r}'|^2 = (x')^2 + (y')^2 = 1$ y además $\mathbf{r}$ junto con todas sus derivadas son iguales en $s = 0$ y $s = 1$.

   (I) (+2) Demuestre que la curvatura de $\mathbf{r}$ se puede calcular usando $\kappa = |\phi'|$ donde ϕ es el ángulo que forma la recta tangente a la curva con el eje x.



   (II) (+2) Demuestre que

$$\int_0^1 \kappa(s)ds \geq 2\pi$$