

- Lea todas las instrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos.
Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^5 P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

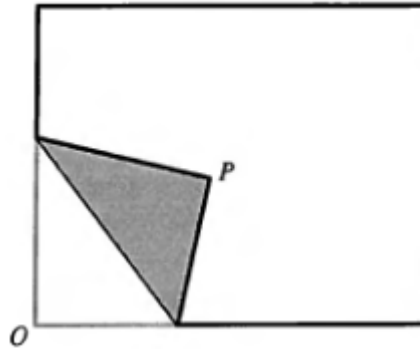
- Se permite consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas.
No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Asuma que el primer cuadrante del plano xy es una hoja infinita de papel. La esquina $(0,0)$ se dobla sobre un punto P tal que el triángulo que resulta de dicho doblaje tiene área ≤ 1 . Calcule el área del lugar geométrico que describe P bajo estas condiciones.

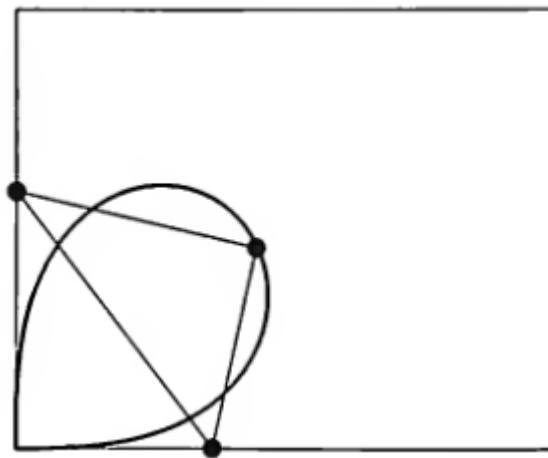


Respuesta(s):

Sean (r, θ) las coordenadas polares de P . Si el doblaje intersecta al eje x en $(a, 0)$ y al eje y en $(0, b)$ se tiene que

$$ab \leq 2, \quad r/2 = a \cos \theta = b \sin \theta \quad \Rightarrow \quad r^2 \leq 4 \sin(2\theta)$$

Por lo tanto la región está delimitada por la curva $r^2 = 4 \sin(2\theta)$ (lazo de Lemniscata)



El área deseada se calcula según

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = 2$$

2. (+4) Sea L la longitud del arco de parábola que une los puntos $A = \langle 0, 1, 1 \rangle$ y $B = \langle -2, 0, 2 \rangle$ y que se obtiene al intersectar el cono $z^2 = x^2 + y^2$ con el plano $y + z = 2$. Calcule el primer dígito de L (la parte entera).

Respuesta(s):

El arco de parábola se puede parametrizar por

$$x = -2t, \quad y = 1 - t^2, \quad z = 1 + t^2, \quad t \in [0, 1]$$

y tiene longitud

$$L = \int_0^1 \sqrt{8t^2 + 4} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{u^2 + 1} \, du$$

Por un lado $L > \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} du = 2$ y por el otro usamos que como $u \mapsto \sqrt{u^2 + 1}$ es convexa

$$L < \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \right) u + 1 \right) du = \sqrt{3} + 1 < 3$$

Por lo tanto 2 es el primer dígito de L .

Nota:

$$L = \frac{\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2}} \sim 2,54255$$

3. (+4) La posición $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ en tiempo t de una partícula de masa $m > 0$ y que está sujeta a una fuerza central de magnitud $f(\mathbf{r})$ satisface $m\mathbf{r}'' = f(\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. Verifique que esta ecuación implica que el momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{r}'$ es constante y que además la trayectoria es una curva plana si $\mathbf{L} \neq 0$.

Respuesta(s):

$$\mathbf{L}' = \mathbf{r} \times m\mathbf{r}'' = \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$$

$\mathbf{r}$ permanece perpendicular al vector fijo $\mathbf{L}$ lo cual establece que la trayectoria sea plana si $\mathbf{L} \neq 0$.

Nota: El resultado también se vale si $\mathbf{L} = 0$, de hecho la trayectoria termina estando contenida en una recta por el origen, pero la demostración es más delicada.

4. (+4) Calcule una fórmula cerrada para x_n si

$$\frac{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}{\delta t^2} + x_n = f_n, \quad x_0 = x_1 = 0$$

Respuesta(s):

Sea

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t}, \quad \mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \delta t \\ -\delta t & 1 \end{pmatrix} = I + \delta t J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tal que $\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n + \delta t f_n \mathbf{e}_2$ con condición inicial $\mathbf{r}_0 = 0$. Por lo tanto se tiene de forma inductiva que

$$\mathbf{r}_n = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \mathbf{e}_2 f_{n-j-1} \delta t \quad \Rightarrow \quad x_n = \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{e}_1 = \sum_{j=0}^{n-1} (A^j \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 f_{n-j-1} \delta t$$

donde

$$A^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \delta t^k J^k = \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{j}{2l} \delta t^{2l} (-1)^l I + \binom{j}{2l+1} \delta t^{2l+1} (-1)^l J$$

y entonces

$$(A^j \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 = \sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{j}{2l+1} (-1)^l \delta t^{2l+1}$$

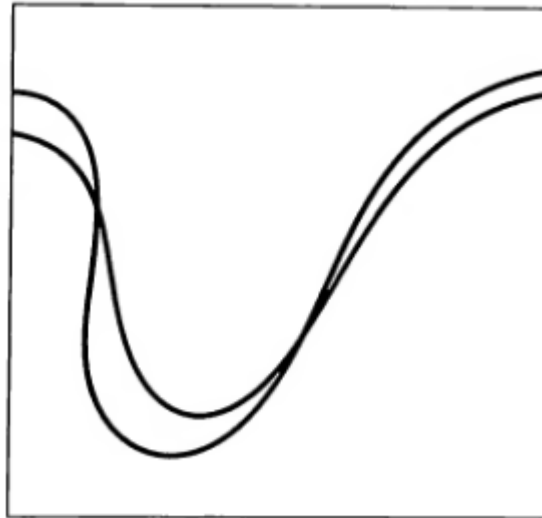
Finalmente

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{j}{2l+1} (-1)^l \delta t^{2l+1} \right) f_{n-j-1} \delta t$$

Nota: Para $z = 1 + i\delta t$

$$\sum_{l=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{j}{2l+1} (-1)^l \delta t^{2l+1} = \operatorname{Im}(z^j) \quad \Rightarrow \quad x_n = \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^j f_{n-j-1} \delta t \right)$$

5. (+4) La figura muestra las huellas que ha dejado marcada una bicicleta en un lodazal de alrededor 6 m de ancho y largo. ¿En qué dirección iba la bicicleta?



Respuesta(s):

Por ser discutido en una futura charla con el Prof. Gil Bor.