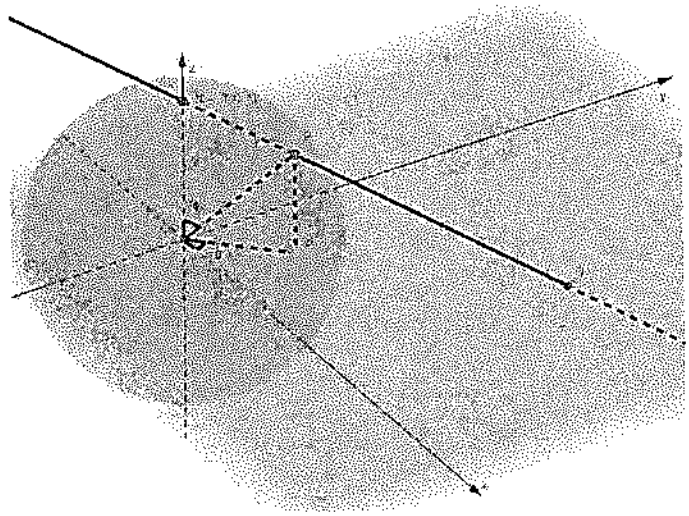
1. (+4) Calcule las coordenadas de Q en términos de $\phi \in (0,\pi)$ y $\theta \in (0,2\pi)$



$$P = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

<u>Dirección</u>: $$u = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi - 1 \end{pmatrix}$$

<u>Recta</u>: $$t \longmapsto N + tu = \begin{pmatrix} t \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ t \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ 1 + t(\cos\phi - 1) \end{pmatrix}$$

<u>Intersección</u>: $$t = \frac{1}{1-\cos\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi \cos\theta / (1-\cos\phi) \\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta / (1-\cos\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. (+4) Calcule las coordenadas del punto Q que se obtiene a partir del punto $P(x, y, z)$ luego de reflejarlo en el plano que pasa por $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$ seguido de una reflexión en el plano que pasa por $O(0,0,0)$, $D(1,1,0)$ y $E(0,1,1)$.

1ra reflexión

normal: $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

reflexión: $P' = \left(I - 2\frac{n_1 \otimes n_1}{|n_1|^2}\right)P + 2\frac{n_1 \otimes n_1}{|n_1|^2}A$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

2da reflexión

normal: $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

reflexión: $P'' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Composición

$$P'' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -4 & -7 & -4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

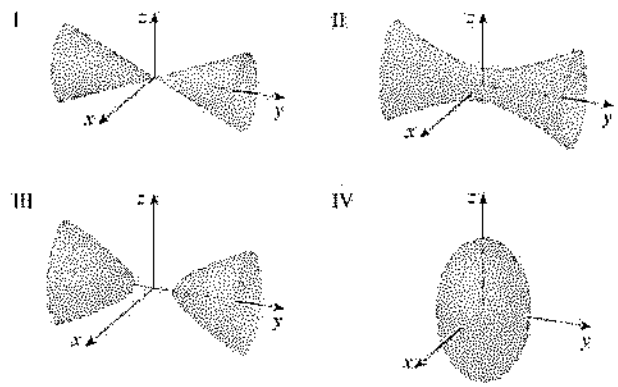
3. (+4) Dado $a, b \in \mathbb{R}$, calcule el máximo valor de h tal que el plano $z = ax + by - h$ intersecta al paraboloide $z = x^2 + y^2$.

$$\max h = -\min\left(x^2 + y^2 - ax - by\right)$$

$$= -\min\left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{4}\right)$$

$$= \boxed{\frac{a^2+b^2}{4}}$$

4. (+4) De ecuaciones (aproximadas) para cada gráfica



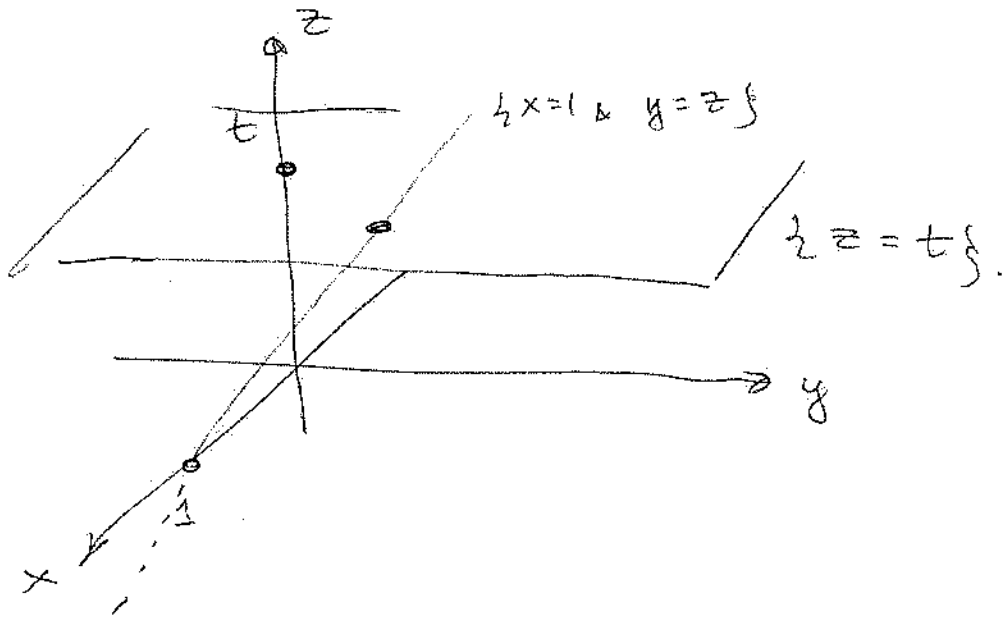
I) $y^2 = x^2 + z^2$

II) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

III) $x^2 - y^2 + z^2 = -1$.

IV) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

5. (+4) ¿Qué superficie se genera a partir de todas las rectas horizontales (paralelas al plano xy) que intersectan el eje z y la recta $\{x = 1, y = z\}$?



Intersección:

$$\{z=t\} \cap \{x=1 \ \& \ y=z\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\}.$$

Recta: por $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}$

$$s \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ st \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = xz = \frac{1}{4}(x+z)^2 - \frac{1}{4}(x-z)^2.$$

Paraboloide hiperbólico (en la dir. del eje y).