Cálculo 3 **Parcial 1 (práctica)** **Agosto del 2019**

- Lea todas las intrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos. Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^{5} P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

- Se permite el consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas. No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Para cada caso, encuentre la ecuación de una esfera con las dadas propiedades:

   1. Centro $C(2,-3,6)$ y toca el plano xy en un solo punto.
   2. Pasa por $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,2,0)$ y $D(0,0,3)$.
   3. Contiene a $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C(0,3,0)$ y $D(0,0,2)$ por dentro y deja a $E(1,1,1)$ por fuera.
   4. Sus puntos satisfacen que la distancia a $A(-1,5,3)$ es el doble de la distancia a $B(6,2,-2)$.
   5. Es tangente a los lados del tetraedro con vértices $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $C(3,4,0)$ y $D(3,4,5)$

Solución:

1. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=36$

2. Por el método de coeficientes indeterminados asumimos que la ecuación es de la forma $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ tal que al evaluar en los puntos por donde pasa la esfera obtenemos $d=0$, $a=-1$, $b=-2$ y $c=-3$. (Completando los cuadrados nos queda la esfera de centro $(1/2,1,3/2)$ y radio $\sqrt{14}/2$, también hay un argumento geométrico para obtener esta solución).

3. Buscamos una solución cuyo centro $P(a,b,c)$ sea equidistante a B, C y D. Es decir $a=b$ (por la simetría entre B y C) y $(a-3)^2+a^2+c^2=2a^2+(c-2)^2$ por lo tanto $4c=6a-5$. Si tomamos $a=b<0$ se tiene que $|PA|<|PB|=|PD|$ y basta entonces preocuparse por obtener $|PB|=|PD|<|PE|$ lo cual es equivalente a

$$(a-3)^2+a^2+c^2<2(a-1)^2+(c-1)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3+c<a$$

substituyendo $c=(6a-5)/4$ vemos que cualquier $a<-7/2$ satisface las condiciones deseadas. En particular, $(x+4)^2+(y+4)^2+(z+29/4)^2=118$ cumple con las hipótesis.

4. Simplificando $(x+1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=4((x-6)^2+(y-2)^2+(z+2)^2)$

$$3(x^2+y^2+z^2)=50x+6y+22z+141$$

5. Sea $P(a,b,c)$ el centro de la esfera. P es equidistante a las caras ABC y BCD (las cuales son perpendiculares) si $c=3-a$. Igualmente las caras ABC y ACD son perpendiculares de donde se deduce $5c=4a-3b$ y por lo tanto $P=(a,5-3a,3-a)$. Usando finalmente que la distancia a la cara ABD es igual a $3-a$ obtenemos

$$3-a=\frac{|5(5-3a)-4(3-a)|}{\sqrt{41}} \qquad \Rightarrow \qquad a=\frac{13+3\sqrt{41}}{11+\sqrt{41}}, b=\dots$$

Una vez calculado el centro el radio es $c=3-a$.

2. (+4) Calcule las intersecciones en cada caso:

   1. El eje imaginario con la recta que pasa por -1 y $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ para $\theta \notin \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
   2. El plano xy con el cono con vértice $V(0,0,1)$, eje paralelo a $\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle$, y ángulo $\pi/4$.
   3. Las alturas en el tetraedro con vértices $A(0,0,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,0,1)$ y $D(1,1,0)$.
   4. Dos conos con vértice $V(0,0,0)$, ángulo $\pi/3$ y ejes paralelos a $\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0,1,0\rangle$ respectivamente.
   5. El plano xy con el plano tangente en el punto $P(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1-r^2})$ (para $r \in (0,1]$) a la esfera de radio 1 con centro en el origen.

Solución:

1. La recta es $y = \tan(\theta/2)(x+1)$ la cual intersecta al eje y en $y = \tan(\theta/2)$.

2. El cono tiene ecuación $\sqrt{2}x = \sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$. Tomando $z=0$ tenemos que $\sqrt{2}x = \sqrt{x^2+y^2+1}$ equivalentemente elevando al cuadrado y recordando que $x>0$ se tiene que $x^2-y^2=1$, es decir una rama de hipérbola.

3. Por simetría y usando producto punto $H(1/2,1/2,1/2)$.

4. $\{x = y = \pm z/\sqrt{2} > 0\}$

5. El plano tiene ecuación $r\cos\theta x + r\operatorname{sen}\theta y + \sqrt{1-r^2}z = 1$ y tomando $z=0$ se obtiene la recta $r\cos\theta x + r\operatorname{sen}\theta y = 1$ en el plano xy.

3. (+4) Para cada caso, calcule el punto $Q(u, v, w)$ que se obtiene a partir de $P(x, y, z)$ usando las transformaciones dadas:

   1. Proyección sobre la recta $x = y = 1 - z$.
   2. Proyección sobre el plano que pasa por $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 3)$.
   3. Reflexión sobre el plano que pasa por $(1, 5, 1)$ y es simultáneamente perpendicular a los planos $2x + y - 2z = 2$ y $x + 3z = 4$.
   4. Reflexión sobre la recta que pasa por $A(1, 1, 1)$ y es paralela a $x = 1 - t$, $y = t - 1$, $z = 1 + t$.
   5. Rotación alrededor de la recta $\{z = 0, 2x+y = 2\}$ que manda $\{z > 0, 6x+3y+2z = 6\}$ en $\{z = 0, 2x + y < 2\}$.

Solución:

1. La recta tiene dirección $\mathbf{u} = \langle 1, 1, -1\rangle$ y Q se obtiene de la intersección de la recta $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u} + \mathbf{r}_0$ con $\mathbf{r}_0 = \langle 0, 0, 1\rangle$ y el plano $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{u} \cdot P$. Es decir $|\mathbf{u}|^2 t = \mathbf{u} \cdot (P - \mathbf{r}_0)$ y

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\mathbf{u} \cdot (P - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u} + \mathbf{r}_0 \\ &= \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}P + \left(I - \frac{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\right)\mathbf{r}_0 \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Truco: El segundo término en la expresión arriba no lo calculé usando la fórmula $\left(I - \frac{\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\right)\mathbf{r}_0$. Simplemente usé que $Q = \mathbf{r}_0$ cuando $P = \mathbf{r}_0$ y de allí despegué. Este truco también lo uso en las cuentas más abajo.

2. El plano tiene normal $\mathbf{n} = \langle 6, 3, 2\rangle$ y Q se obtiene de la intersección de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot A$ y la recta $\mathbf{r}(t) = P + t\mathbf{n}$. Es decir $|\mathbf{n}|^2 t = \mathbf{n} \cdot (A - P)$ y

$$Q = \left(I - \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\right)P + \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}A = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 13 & -18 & -12 \\ -18 & 40 & -6 \\ -12 & -6 & 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36/49 \\ 18/49 \\ 12/49 \end{pmatrix}$$

3. El plano tiene normal $\mathbf{n} = \langle 3, -8, -1\rangle$ y pasa por $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 5, 1\rangle$. $Q = P + t\mathbf{n}$ debe satisfacer que el punto medio entre P y Q está en el plano. Es decir que $|\mathbf{n}|^2 t = 2\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_0 - P)$ y

$$Q = \left(I - 2\frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\right)P + 2\frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{r}_0 = \frac{1}{74}\begin{pmatrix} 56 & 48 & 6 \\ 48 & -54 & -16 \\ 6 & -16 & -72 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 302/74 \\ -238/74 \\ -146/74 \end{pmatrix}$$

4. La recta tiene dirección $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 1\rangle$ y pasa por $A(1,1,1)$. La proyección R se calcula según (parte **1.**)

$$R = \frac{\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}P + \left(I - \frac{\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\right)A$$

Usando que R es el punto medio entre P y Q

$$\begin{aligned} Q &= \left(2\frac{\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} - I\right)P + 2\left(I - \frac{\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\right)A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. La recta tiene dirección $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, -2, 0\rangle$ y pasa por $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 0, 0\rangle$. El ángulo de rotación alrededor de $\mathbf{u}$ es $\alpha = \cos^{-1}(2/49) \in (0, \pi/2)$. Tomamos $P' = P - \mathbf{r}_0 = (x-1, y, z)$ y rotamos P' alrededor de $\mathbf{u}$ con ángulo α para obtener $Q - \mathbf{r}_0$

$$\begin{aligned} Q - \mathbf{r}_0 &= (\cos\alpha)P' + (\sin\alpha)\mathbf{u}\times P' + (1-\cos\alpha)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})P' \\ &= \left(\frac{2}{49}I + \frac{\sqrt{2497}}{49\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{47}{245}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 57/245 & -94/245 & -2\sqrt{2497}/49\sqrt{5} \\ -94/245 & 198/245 & -\sqrt{2497}/49\sqrt{5} \\ 2\sqrt{2497}/49\sqrt{5} & \sqrt{2497}/49\sqrt{5} & 10/245 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente

$$Q = \begin{pmatrix} 57/245 & -94/245 & -2\sqrt{2497}/49\sqrt{5} \\ -94/245 & 198/245 & -\sqrt{2497}/49\sqrt{5} \\ 2\sqrt{2497}/49\sqrt{5} & \sqrt{2497}/49\sqrt{5} & 10/245 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 188/245 \\ 94/245 \\ -2\sqrt{2497}/49\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

4. (+4) Calcule los máximos o mínimos en cada caso:

   1. $\text{mín}(|AP| + |PQ| + |QB|)$ donde $A(0,2)$, $B(4,-3)$, $P(d,1)$ y $Q(d,-1)$ para $d \in \mathbb{R}$ variable. Pueden imaginar que $\{x \in (-1,1)\}$ es un río que separa dos ciudades A y B, el objetivo es buscar la mejor ubicación para construir un puente.
   2. $\text{mín}\,|PQ|$ tal que P está sobre la recta que pasa por $A(1,0,0)$ y $B(0,1,0)$ y Q está sobre la recta que pasa por $C(1,1,0)$ y $D(0,0,1)$.
   3. La mayor área del triángulo ABC donde $A(-1,0)$, $B(1,0)$ y el perímetro de ABC es 5.
   4. $\text{máx}\, h$ tal que el plano $z = ax + by - h$ intersecta al paraboloide $z = x^2 + y^2 - xy$.
   5. $$\text{mín}\left\{\sum_{i=1}^{100}(x_{i+1} - x_i)^2 \ : \ x_1 = 0 \text{ y } x_{101} = 1\right\}$$

Solución:

1. Para cualquier d, $|PQ| = 2$. Por otro lado si consideramos $A'(0,1)$, $B'(4,-2)$ y $R(d,0)$ se tiene que $|AP| = |A'R|$ y $|QB| = |RB'|$, de modo que para minimizar $|AP| + |PQ| + |QB| = |A'R| + 2 + |RB'|$ basta con tomar R en la intersección de $A'B'$ con el eje x

$$\text{mín}(|AP| + |PQ| + |QB|) = |A'B'| + 2 = 7$$

2. $(P - Q)$ tiene que ser perpendicular a ambas rectas y por lo tanto el segmento se obtiene cuando intersectamos los dos planos que contienen a una recta y es perpendicular a la otra. El plano que contiene a AB y es perpendicular a CD es paralelo a los vectores

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - B) \times (C - D) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto su ecuación es $x + y - z = 1$ y $Q = (2/3, 2/3, 1/3)$ se obtiene de la intersección del plano con la recta $CD : t \mapsto (0,0,1) + t(1,1,-1)$. Similarmente la ecuación del plano que contiene a CD y es perpendicular a AB es $x = y$ y $P = (-1/2, -1/2, 0)$

$$\text{mín}\,|PQ| = \sqrt{51/18}$$

3. C pertenece a la elipse $20x^2 + 36y^2 = 45$ y la máxima altura se alcanza cuando $C = (0, \pm\sqrt{5}/2)$

$$\text{máx}\, Area(ABC) = \sqrt{5}/2$$

4. Buscamos minimizar

$$x^2 + y^2 - xy - ax - by = \left(x - \frac{y+a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{1}{3}(a + 2b)\right)^2 - \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

con la expresión del lado derecho es fácil ver que el mínimo se logra cuando los dos primeros cuadrados se anulan por lo que

$$\operatorname{máx} h = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

5. Si $x \in \mathbb{R}^{101}$ minimiza

$$|Dx|^2 = \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{100} \\ x_{101} \end{pmatrix} \right|^2$$

bajo la restricción $x_1 = 0$ y $x_{101} = 1$. Entonces para cualquier $y \in \mathbb{R}^{101}$ con $y_1 = y_{101} = 0$ y $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|Dx|^2 \leq |D(x + ty)|^2 = |Dx|^2 + 2tDx \cdot Dy + t^2|Dy|^2$$

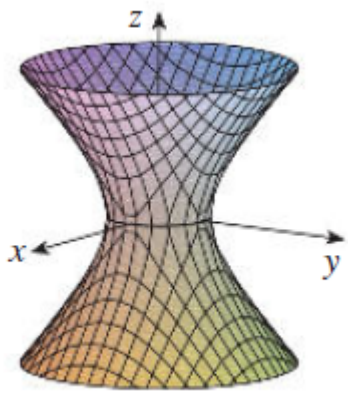
por lo tanto $0 = Dx \cdot Dy = D^T Dx \cdot y$ para todo $y \in \mathbb{R}^{101}$ con $y_1 = y_{101} = 0$ lo cual implica que x satisface

$$x_{i+1} + x_{i-1} = 2x_i \qquad i \in \{2, 3, \ldots, 100\}$$

Usando que $x_1 = 0$ y $x_{101} = 1$ se obtiene $x_i = (i-1)/100$

$$\operatorname{mín} \left\{ \sum_{i=1}^{100} (x_{i+1} - x_i)^2 \ : \ x_1 = 0 \text{ y } x_{101} = 1 \right\} = 1/100$$

5. (+4) ¿Qué superficie se genera cuando se rota la recta $x = 1$, $y = z$ alrededor del eje z?

Solución:

La recta $t \mapsto (1, t, t)$ se transforma en la recta $t \mapsto (\cos\theta - t\,\mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{sen}\,\theta + t\cos\theta, t)$ cuando la rotamos un ángulo θ alrededor de $\mathbf{k}$. Equivalentemente esta superficie se caracteriza por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ el cual es un hiperboloide de una hoja.