Cálculo 3 **Parcial 1 (práctica)** **Agosto del 2019**

- Lea todas las intrucciones y preguntas con cuidado antes de comenzar.
- Cada problema vale cuatro puntos y el total del examen son doce puntos. Es decir que el total se calcula según:

$$T = \sum_{i=1}^{5} P_i - \min_{1 \leq i < j \leq 5} (P_i + P_j)$$

- Se permite el consultar notas.
- Las soluciones deben ser justificadas, legibles y organizadas. No se corregirán aquellas soluciones que no puedan ser comprendidas.

Nombre completo: _____

Problema:	1	2	3	4	5	Total
Valor:	4	4	4	4	4	12
Puntaje:						

¡Disfruta el examen y buena suerte!

1. (+4) Para cada caso, encuentre la ecuación de una esfera con las dadas propiedades:

    1. Centro $C(2, -3, 6)$ y toca el plano xy en un solo punto.
    2. Pasa por $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ y $D(0, 0, 3)$.
    3. Contiene a $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ y $D(0, 0, 2)$ por dentro y deja a $E(1, 1, 1)$ por fuera.
    4. Sus puntos satisfacen que la distancia a $A(-1, 5, 3)$ es el doble de la distancia a $B(6, 2, -2)$.
    5. Es tangente a los lados del tetraedro con vértices $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(3, 4, 0)$ y $D(3, 4, 5)$

2. (+4) Calcule las intersecciones en cada caso:

   1. El eje imaginario con la recta que pasa por -1 y $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ para $\theta \notin \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
   2. El plano xy con el cono con vértice $V(0,0,1)$, eje paralelo a $\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle$, y ángulo $\pi/4$.
   3. Las alturas en el tetraedro con vértices $A(0,0,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,0,1)$ y $D(1,1,0)$.
   4. Dos conos con vértice $V(0,0,0)$, ángulo $\pi/3$ y ejes paralelos a $\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0,1,0\rangle$ respectivamente.
   5. El plano xy con el plano tangente en el punto $P(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1-r^2})$ (para $r \in (0,1]$) a la esfera de radio 1 con centro en el origen.

3. (+4) Para cada caso, calcule el punto $Q(u, v, w)$ que se obtiene a partir de $P(x, y, z)$ usando las transformaciones dadas:

   1. Proyección sobre la recta $x = y = 1 - z$.
   2. Proyección sobre el plano que pasa por $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 3)$.
   3. Reflexión sobre el plano que pasa por $(1, 5, 1)$ y es simultáneamente perpendicular a los planos $2x + y - 2z = 2$ y $x + 3z = 4$.
   4. Reflexión sobre la recta que pasa por $A(1, 1, 1)$ y es paralela a $x = 1 - t$, $y = t - 1$, $z = 1 + t$.
   5. Rotación alrededor de la recta $\{z = 0, 2x+y = 2\}$ que manda $\{z > 0, 6x+3y+2z = 6\}$ en $\{z = 0, 2x + y < 2\}$.

4. (+4) Calcule los máximos o mínimos en cada caso:

   1. $\text{mín}(|AP| + |PQ| + |QB|)$ donde $A(0,2)$, $B(4,-3)$, $P(d,1)$ y $Q(d,-1)$ para $d \in \mathbb{R}$ variable. Pueden imaginar que $\{x \in (-1,1)\}$ es un río que separa dos ciudades A y B, el objetivo es buscar la mejor ubicación para construir un puente.
   2. $\text{mín}\,|PQ|$ tal que P está sobre la recta que pasa por $A(1,0,0)$ y $B(0,1,0)$ y Q está sobre la recta que pasa por $C(1,1,0)$ y $D(0,0,1)$.
   3. La mayor área del triángulo ABC donde $A(-1,0)$, $B(1,0)$ y el perímetro de ABC es 5.
   4. $\text{máx}\, h$ tal que el plano $z = ax + by - h$ intersecta al paraboloide $z = x^2 + y^2 - xy$.
   5. $$\text{mín}\left\{\sum_{i=1}^{100}(x_{i+1} - x_i)^2 \ : \ x_1 = 0 \text{ y } x_{101} = 1\right\}$$

5. (+4) ¿Qué superficie se genera cuando se rota la recta $x = 1$, $y = z$ alrededor del eje z?