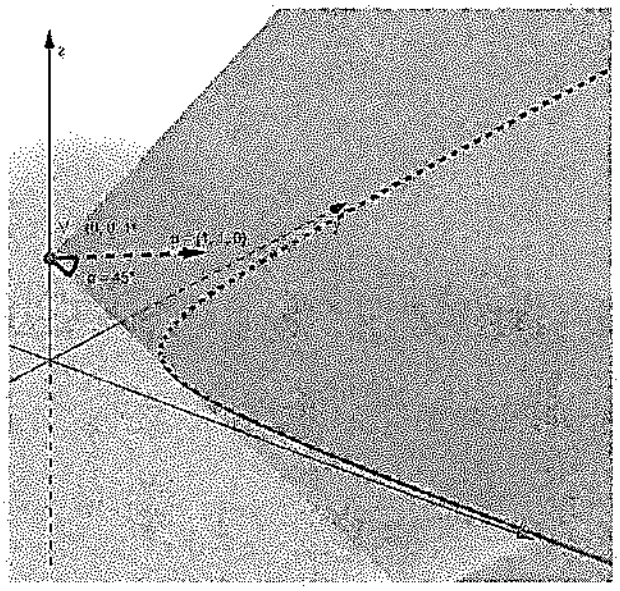
1. (+4) Calcule la ecuación de la intersección del plano xy con el cono que se muestra en la figura



Ec'n del cono:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x + y = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

Tomando $z = 0$ y elevando al cuadrado

$$\Rightarrow \quad \boxed{2xy = 1 \quad \& \quad x, y > 0}$$

2. (+4) Calcule las coordenadas del punto Q que se obtiene a partir del punto $P(x, y, z)$ luego de rotarlo 90° alrededor de $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ seguido de una reflexión en el plano que pasa por $A(0, 1, 1)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(1, 1, 0)$.

Rotación:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto P' = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

Reflexión

normal: $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P' \longmapsto Q = \left(I - 2 \frac{n \otimes n}{|n|^2} \right) P' + 2 \frac{n \otimes n}{|n|^2} A$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

3. (+4) Calcule los puntos en el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ que son tangentes a un plano paralelo a $x + y + z = 0$.

Sea (x_0, y_0, z_0) un pto. del elipsoide. Tomando el cambio de variables $(x, y, z) \mapsto (u, v, w) = (x, \sqrt{2}y, \sqrt{3}z)$ el elipsoide pasa a ser la esfera $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ cuyo plano tangente en $(u_0, v_0, w_0) = (x_0, \sqrt{2}y_0, \sqrt{3}z_0)$ es

$$u_0 u + v_0 v + w_0 w = 1$$

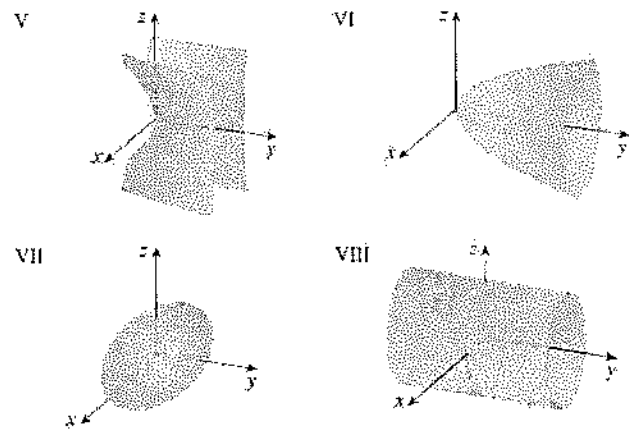
Devolviendo el cambio de variables nos queda que el plano tangente al elipsoide en (x_0, y_0, z_0) tiene ecuación

$$x_0 x + 2y_0 y + 3z_0 z = 1.$$

Para que sea paralelo a $x + y + z = 1$ hace falta que $x_0 = 2y_0 = 3z_0 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{6}{11}}$

$$\Longrightarrow \boxed{(x_0, y_0, z_0) = \pm\sqrt{\frac{6}{11}}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)}$$

4. (+4) De ecuaciones (aproximadas) para cada gráfica



V) $y = x^2 - z^2$

VI) $y = x^2 + z^2$

VII) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$

VIII) $4x^2 + z^2 = 1$.

5. (+4) Generamos una *Banda de Möbius* rotando el punto medio de un segmento de longitud l a lo largo de la circunferencia $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ tal que en el punto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ el segmento es coplanar con el eje z y forma un ángulo $\theta/2$ con dicho eje. Determine el mayor valor de l para el cual la superficie no se cruce con ella misma.

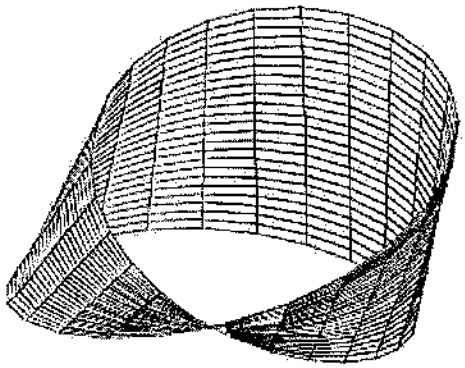


Figure 34

Problema 648 en Putnam and Beyond de Răzvan Gelca y Titu Andreescu.