

EL PROBLEMA DEL BARRENDERO

HÉCTOR A. CHANG-LARA

RESUMEN. Analizamos una versión discreta del método de balayage propuesto por Hermann Schwarz y rigurosamente demostrado por Henri Poincaré a finales del siglo diecinueve para la resolución de la ecuación de Laplace.

1. UN JUEGO PARA COMENZAR

Para el juego del barrendero necesitamos papel, lápiz, borrador y una calculadora. Comienza dibujando un tablero de dimensiones dos por tres como en la Figura 1. Inicialmente hay un montoncito de arena en la casilla superior izquierda y un bote de basura en la casilla inferior derecha. Te aconsejo que no dibujes el montoncito de arena, pues esto irá cambiando durante el juego. Tampoco necesitas arena de verdad o un bote, la idea es que con la ayuda de la calculadora iremos registrando en el papel como irá cambiando la cantidad de arena en el juego a medida que este transcurre.

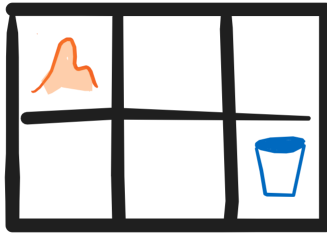


FIGURA 1. El tablero y su configuración inicial

El objetivo es barrer tanta arena como sea posible en el bote, para esto debes escoger en una serie de turnos una de las casillas del tablero y barrerla. Barrer una casilla significa repartir la arena que en ella se encuentra en partes iguales entre sus **cuatro** posiciones adyacentes (arriba, abajo, izquierda y derecha). Ten en cuenta que algunas de ellas se salen del tablero, esta será arena que no podrás recuperar.

Por ejemplo, la primera jugada (forzosamente en la esquina superior izquierda) se ve como en la Figura 2.

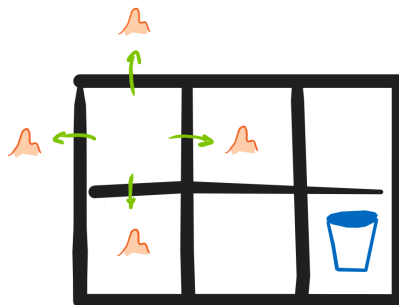


FIGURA 2. La primera jugada

El reto al que te invito con este rompecabezas es el siguiente: Sin importar el número de turnos que te tardes, ¿cuánta arena puedes meter en el bote? Juega un poco antes de seguir leyendo.

1.1. Algunas estrategias. Para fijar ideas y facilitar la presentación, usaremos la enumeración de las casillas como en la figura a continuación y diremos que la cantidad inicial de arena es 1. Las unidades (gramos, kilos, centímetros cúbicos, litros, etc.) con las que podríamos medir la arena no son relevantes para nuestro juego y por lo tanto no nos preocuparemos por fijarlas.

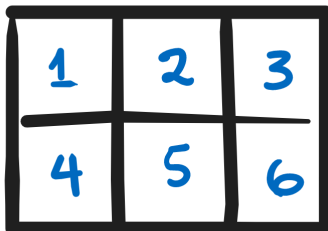


FIGURA 3. Enumeración de las casillas

La primera jugada es forzosamente barrer la casilla 1. Esto manda la mitad de la arena fuera del tablero y deja $1/4$ en las casillas 2 y 4. Luego de esto tenemos distintas posibilidades. Vamos a intentar algunas y ver que logramos.

Nuestra primera estrategia no es muy buena, pero sin embargo es la más sencilla que se nos ocurre y nos permite familiarizarnos con el problema. Proponemos que luego de barrer la casilla 1, procedemos a barrer las casillas 4 y 5 alternadamente, olvidándonos de lo que sucede con el resto del tablero. Ciertamente no es lo mejor que podemos hacer, pues esto siempre va dejando arena en las casillas 1 y 2 las cuales no volveremos a tocar bajo esta propuesta.

Observamos que al comienzo de los turnos pares siempre hay arena en la casilla 4 y la 5 está vacía mientras que al comienzo de los turnos impares (mayores que 1) siempre hay arena en la casilla 5 y la 4 está vacía. Más aún, si denotamos por μ_k la cantidad de arena en la casilla 4 al comienzo del turno $2k$, tenemos lo siguiente: Una vez que barremos la 4, la 5 recibe $\mu_k/4$. Una vez que barremos la 5, tanto el bote como la casilla 4 reciben $\mu_k/16$.

Es decir que $\mu_{k+1} = \mu_k/16$. De forma inductiva descubrimos una fórmula cerrada para μ_k teniendo en cuenta que $\mu_1 = 1/4$

$$\mu_k = \frac{\mu_{k-1}}{16} = \frac{\mu_{k-2}}{16^2} = \dots = \frac{\mu_1}{16^{k-1}} = \frac{1}{4 \times 16^{k-1}}.$$

Cada dos turnos el bote recibe sucesivamente las siguientes cantidades de arena: $\mu_1/16, \mu_2/16, \dots$. Es decir que la cantidad que el bote recibe luego del turno $2k + 1$ está dado por la suma geométrica

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{16} + \frac{\mu_2}{16} + \dots + \frac{\mu_k}{16} &= \frac{1}{64} \left(1 + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16^{k-1}} \right), \\ &= \frac{1}{64} \times \frac{1 - \frac{1}{16^k}}{1 - \frac{1}{16}}, \\ &= \frac{1 - \frac{1}{16^k}}{60}. \end{aligned}$$

Notemos que estas sumas son crecientes (lo cual es intuitivo si consideramos que nunca sacamos arena del bote) y tienen como límite $1/60$ cuando $k \rightarrow \infty$. Como resultado de esta serie concluimos que bajo esta estrategia el bote logra recibir por lo menos cualquier cantidad de arena menor que $1/60$, luego de un número suficientemente grande de turnos.

1.1.1. Ejercicio 1. Otra posible estrategia muy sencilla es barrer periódicamente las casillas 1, 2 y 3. Se trata de un caso que podemos analizar de forma similar al anterior y el resultado te lo dejamos como ejercicio. Al final de este artículo encontrarás una sección con las respuestas.

1.2. Simulación. Una vez más, la estrategia en el ejercicio anterior no es óptima, pues va dejando arena en las casillas 4 y 5. Una estrategia que finalmente combina ambas es barrer periódicamente las casillas 1, 2, 3, 4, y 5. Una vez más la cantidad de arena que recibe el bote en este caso debe poder calcularse por medio de una combinación de series geométricas. Sin embargo a estas alturas, y dado que queremos seguir explorando otras estrategias cada vez más complicadas, es sensato que recurramos a una simulación por computadora.

En nuestro programa debemos pensar primero en las variables que deben estar involucradas y como estas interactúan entre si. Hagamos una lista:

- El turno que indicaremos por k ,
- la distribución de arena al comienzo del turno k en las distintas casillas del tablero. Esto lo denotaremos por $\mu_k(i)$ para $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Las reglas del juego dicen que cuando barremos la casilla 1 en un dado turno k , entonces los valores de μ_{k+1} se definen según

$$\mu_{k+1}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, \\ \mu_k(i) + \frac{1}{4}\mu_k(1) & \text{si } i \in \{2, 4\}, \\ \mu_k(i) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Si en cambio barremos otra casilla, digamos j , debemos reemplazar la condición en la primera línea ($i = 1$) por $i = j$, y en la segunda línea ($i \in \{2, 4\}$) por las casillas que son adyacentes a j . Por ejemplo, para $j = 2$ se vería en cambio así

$$\mu_{k+1}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 2, \\ \mu_k(i) + \frac{1}{4}\mu_k(1) & \text{si } i \in \{1, 3, 5\}, \\ \mu_k(i) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos así con un sencillo ciclo nuestro programa para calcular la arena que recibe el bote cuando barremos periódicamente los nodos 1, 2, 3, 4, y 5. En el siguiente enlace encontrarás una implementación en Python:

<https://colab.research.google.com/drive/1NXb3ZqIz-jKiyC2ARGxHuTSQsL4wCDH3?usp=sharing>

Es muy sencillo tomar este código y modificarlo para ir explorando otras estrategias. Por ejemplo, podríamos ver otra alternativa periódica como 1, 4, 2, 5, 3; ó quizás una completamente aleatoria (ambas implementadas igualmente en el enlace anterior). La sorpresa es que en

cualesquiera de estos casos la respuesta parece ser la misma, **¡Incluso para la estrategia aleatoria!**

¿Tiene esto sentido? Si ya has jugado lo suficiente con este modelo sospecharás lo raro que es esta conjetura. Ella sugiere que cuando intentamos barrer todas las casillas, la cantidad de arena que llega al bote es independiente del orden en que estas se hayan barrido. Sin embargo, el modelo que hemos descrito es sensible al orden en que se barren las casillas, por ejemplo observemos lo que sucede en la Figura 4 para dos distintas formas de barrer dos casillas adyacentes. La de arriba deposita más arena en el bote.

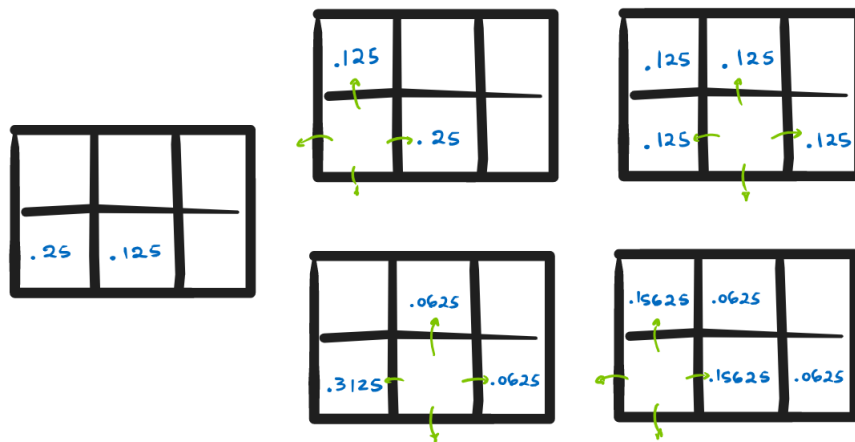


FIGURA 4. El orden de las barridas sí afecta el resultado

El objetivo de este artículo será demostrar la validez de esta conjetura y explorar algunas de sus consecuencias. La idea clave está basada en un principio sencillo y bastante intuitivo (la ley de conservación de la masa) aunque en una primera lectura puede parecer sorprendente su aparición. La presentación está motivada por el método de balayage¹, una técnica sugerida por Hermann Schwarz, y rigurosamente analizada por Henri Poincaré a finales del siglo diecinueve para demostrar la existencia de la ecuación de Laplace con dato de borde fijo [7]. Esperamos así con este breve artículo ofrecer una invitación al análisis de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

¹Barrer en francés

Agradecimientos: Esta presentación ha formado parte de distintas charlas del autor y más recientemente del taller de ecuaciones diferenciales parciales para la EMALCA-México 2021 organizada por la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco [3]. El trabajo de H. Chang-Lara ha sido generosamente financiado por el proyecto CONACyT-MEXICO A1-S-48577.

2. EL TEOREMA DEL BARRENDERO

Para poder plantear un teorema formal en nuestro problema comenzamos por definir algunos de los ingredientes. Como buenos matemáticos tenemos en mente dar una versión un poco más general.

Modelaremos en primer lugar el tablero usando la retícula \mathbb{Z}^2 con la relación de adyacencia $x \sim y$ cuando $\|x - y\| = 1$. Podemos imaginar que cada uno de los puntos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ no es más que una etiqueta para una casilla cuadrada centrada en (x_1, x_2) de lado 1. Sus casillas adyacentes son las cuatro que son contiguas en las direcciones cardinales, es decir $(x_1 - 1, x_2)$, $(x_1 + 1, x_2)$, $(x_1, x_2 - 1)$, y $(x_1, x_2 + 1)$.

Sea $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ la distribución de arena inicial que buscamos barrer de alguna región $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$. En el juego que encontramos en la introducción el dominio sería el tablero dos por tres menos la casilla 6 donde está el bote, y la distribución de arena inicial es aquella que concentra el montoncito en la casilla 1²

$$(1) \quad \Omega = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\} \quad \text{y} \quad \mu = \mathbb{1}_{(0,1)}.$$

Un plan de barridas está dado por una lista de casillas $b_1, b_2, \dots \in \Omega$, las que iremos barriendo en el orden respectivo. Si $\mu_k : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ denota la distribución de arena luego del k^{mo} turno, se tiene entonces la siguiente fórmula recursiva comenzando de $\mu_0 := \mu$,

$$\mu_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = b_k, \\ \mu_{k-1}(x) + \frac{1}{4}\mu_{k-1}(b_k) & \text{si } x \sim b_k, \\ \mu_{k-1}(x) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Decimos que el plan $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ barre a μ de Ω si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Con estas herramientas ya podemos formular nuestro teorema.

²Dado $S \subseteq \mathbb{Z}^2$, denotamos por $\mathbb{1}_S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica o indicadora del conjunto, es decir

$$\mathbb{1}_S(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Si $S = \{x_0\}$ denotamos por conveniencia $\mathbb{1}_{x_0} := \mathbb{1}_{\{x_0\}}$.

Teorema 1. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ se tiene que cualesquiera dos planes $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ y $b'_1, b'_2, \dots \in \Omega$ que barren a μ de Ω satisfacen que los siguientes límites existen y son iguales*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu'_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}^2.$$

Observemos que los valores de interés para los límites son aquellos donde x está en el complemento de Ω . Por hipótesis ya sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu'_k(x) = 0$ si $x \in \Omega$.

Si aplicamos este resultado al caso dado por nuestro problema original donde Ω y μ están dados por (1), descubrimos que en el límite el bote recibe una cantidad de arena dada por $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k((2, 0))$. El teorema nos garantiza así que sin importar el plan que se haya usado, y siempre que todas las casillas en Ω terminen limpias, la cantidad de arena en el bote será la misma en el límite. Más aún, también nos dice que la cantidad de arena en cualquiera de las demás casillas por fuera del tablero también son independientes del plan de barridas.

En la demostración de este resultado también veremos una forma práctica para calcular el límite $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$ por medio de la solución de un sistemas de ecuaciones lineales.

2.1. Ley de conservación. Una idea útil es llevar el registro de cuánta arena ha salido de una casilla dada x luego de k turnos. Esto lo podemos modelar de forma precisa definiendo las funciones $u_k : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ tales que $u_0 = 0$, y a partir de $k \geq 1$

$$u_k(x) := \begin{cases} u_{k-1}(x) + \mu_{k-1}(b_k) & \text{si } x = b_k, \\ u_{k-1}(x) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

¿Qué quiere decir esta fórmula? Al principio no hemos barrido ninguna casilla y por lo tanto u_0 es idénticamente nula. En el turno k barremos la casilla b_k y por lo tanto debemos sumar al acumulado previo $u_{k-1}(b_k)$, la cantidad de arena en la casilla b_k al comenzar dicho turno, es decir $\mu_{k-1}(b_k)$. Los demás valores de u_k son exactamente los mismos de u_{k-1} . También pudimos haber escrito la recurrencia usando la función indicadora como

$$u_k := u_{k-1} + \mu_{k-1}(b_k) \mathbb{1}_{b_k}.$$

Observemos que para cualquier plan $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ se tiene necesariamente que u_k permanece nula en el complemento de Ω .

La función u_k nos permite dar una fórmula para la **ley de conservación de masa**: En los primeros k turnos, la arena que entra menos la que sale de una casilla x es justamente la diferencia entre las distribuciones μ_k menos μ_0 en x . Teniendo en cuenta que la arena que

entra a x está dada por un cuarto de la arena que sacan sus casillas adyacentes tenemos que

$$\underbrace{\mu_k(x)}_{\text{arena final}} - \underbrace{\mu_0(x)}_{\text{arena inicial}} = \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u_k(y)}_{\text{arena que entra}} - \underbrace{u_k(x)}_{\text{arena que sale}} .$$

Esta identidad puede ser rigurosamente demostrada por un clásico argumento inductivo usando las recursiones que definen a μ_k y u_k .

La expresión en el lado derecho juega un rol protagónico en esta presentación y se conoce como el **Laplaciano discreto**. Lo denotaremos de ahora en adelante usando

$$\Delta u(x) := \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u(y) - u(x).$$

En otras palabras, la ley de conservación de masa dice que

$$\Delta u_k = \mu_k - \mu.$$

Nótese que también podemos reescribir la recurrencia para μ_k usando el Laplaciano como

$$\mu_k = \mu_{k-1} + \mu_{k-1}(b_k) \Delta \mathbb{1}_{b_k}.$$

Una propiedad fundamental del Laplaciano es su linealidad. Es decir que satisface el principio de superposición: Dadas las constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y las funciones $u, v : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha \Delta u + \beta \Delta v.$$

Volviendo al problema del barrendero, pensemos un poco en las consecuencias que podemos deducir de la ley de conservación, dado que los límites propuestos existen. Asumamos que tenemos un plan que barre a μ de Ω tal que los límites $\mu_k \rightarrow \mu_\infty$ y $u_k \rightarrow u$ están bien definidos en todo \mathbb{Z}^2 (lo cual será parte de la demostración). En el límite recuperamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales sobre Ω , donde recordemos se tiene que $\mu_k \rightarrow 0$,

$$\Delta u = -\mu \text{ en } \Omega.$$

Mientras tanto en el complemento de Ω sabemos automáticamente que $u = 0$, dado que las barridas nunca sacan arena de estas casillas. Lo curioso de este sistema de ecuaciones lineales (para las variables $\{u(x)\}_{x \in \Omega}$) es que a simple vista su formulación pareciera ser independiente del plan de barridas. ¡Esta es la clave de la demostración!

Una vez calculada la función u tenemos que en todo \mathbb{Z}^2 se cumple que

$$\mu_\infty = \mu + \Delta u.$$

Finalmente buscamos concluir que μ_∞ es independiente del plan gracias a que u es de hecho independiente del plan.

2.1.1. Ejercicio 2. En nuestro problema original dado por (1), ¿cuál sería el sistema de ecuaciones? ¿Cómo calculamos finalmente la cantidad de arena que recibe el bote $\mu_\infty((2, 0))$?

2.2. Existencia y unicidad de soluciones. En esta sección analizamos la existencia y unicidad de soluciones para el siguiente sistema de ecuaciones, conocido como el **problema de Dirichlet** o la **ecuación de Poisson con dato de borde cero**

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dado que los valores de u ya se encuentran fijos en el complemento de Ω , las incógnitas restantes en el sistema consisten de los valores de u en Ω . La ecuación $\Delta u = -\mu$ sobre Ω representa así un sistema lineal de³ $|\Omega|$ ecuaciones y $|\Omega|$ incógnitas.

Tengamos en cuenta uno de los primeros resultados que aprendemos en álgebra lineal: Sea A una matriz cuadrada. Para que el sistema $Ax = b$ tenga soluciones únicas para cualquier b , basta con demostrar bien sea la existencia de soluciones para cualquier b o la unicidad de las soluciones para algún b (en particular $b = 0$). En otras palabras, A es invertible si y solo si logramos verificar que es inyectiva o sobreyectiva.

Nuestra estrategia consistirá en probar la unicidad, o equivalentemente la inyectividad de la transformación lineal $\Delta : V \rightarrow W$ donde

$$\begin{aligned} V &:= \{u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega\}, \\ W &:= \{\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

son espacios vectoriales, ambos de dimensión $|\Omega|$. Tengamos en cuenta que la inyectividad de Δ es equivalente a decir que si $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

entonces necesariamente $u = 0$ en todo \mathbb{Z}^2 .

La idea para establecer dicha inyectividad consiste en el siguiente resultado conocido como el *principio del mínimo*: Si $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es no-negativa en el complemento de Ω y satisface $\Delta u \leq 0$ en Ω entonces u es necesariamente no-negativa en todas partes. En otras palabras no puede alcanzar un mínimo estrictamente negativo en Ω .

³Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ denotamos por $|\Omega|$ al número de puntos en Ω .

Probablemente ya algunos lectores sospechen la conexión del Laplaciano discreto con el Laplaciano continuo el cual involucra las segundas derivadas de una función. En este sentido el principio del mínimo es una manifestación discreta del criterio de la segunda derivada⁴. Vale la pena leer la demostración a continuación teniendo esta idea en mente.

Lema 2 (Principio del mínimo). *Dado $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito*

$$\begin{cases} \Delta u \leq 0 \text{ en } \Omega, \\ u \geq 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega, \end{cases}$$

entonces $u \geq 0$ en todo \mathbb{Z}^2 .

Demostración. Asumamos por contradicción que $\min_{\Omega} u < 0$ y sea $M := \{x \in \Omega : u(x) = \min_{\Omega} u\}$ finito y no vacío. Tomemos $x^* \in M$ para el cual existe algún $y^* \sim x^*$ fuera de M , es decir que $u(x^*) < u(y^*)$. Podríamos decir que u alcanza en x^* un mínimo localmente estricto, dado que por lo menos en un nodo adyacente la desigualdad es estricta. No es difícil probar que siempre es posible encontrar un punto x^* con tales características gracias a que tanto M como su complemento son no vacíos.

Vemos que ahora tenemos una contradicción a partir de evaluar la ecuación $\Delta u \leq 0$ sobre x^*

$$0 < \frac{1}{4} \sum_{y \sim x^*} u(y) - u(x^*) = \Delta u(x^*) \leq 0.$$

La primera desigualdad se debe a que u alcanza su mínimo en x^* , más aún es estricta gracias a la existencia de por lo menos una casilla adyacente y^* donde $u(x^*) < u(y^*)$. La última desigualdad se obtiene de la hipótesis $\Delta u \leq 0$ en Ω . \square

Corolario 3 (Existencia y unicidad de soluciones). *Para $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene una única solución $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

⁴Si $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función doblemente diferenciable que alcanza su mínimo en x^* entonces $\Delta u(x^*) = u''(x^*) \geq 0$. En general, cuando $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos que $D^2u(x^*)$ es definida no-negativa, es decir que

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

En particular $\Delta u(x^*) = \text{tr}(D^2u(x^*)) \geq 0$.

Demostración. Buscamos una solución en el espacio vectorial

$$V := \{u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega\},$$

cuya dimensión está dada por $|\Omega| < \infty$. Consideramos también el espacio de funciones $W = \{\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$ el cual es isomorfo a V , puesto que tienen la misma dimensión. Basta con demostrar que el operador lineal $\Delta : V \rightarrow W$ es inyectivo, o equivalentemente tiene un núcleo trivial. Por el teorema fundamental del álgebra lineal esto automáticamente nos diría que el operador es biyectivo, y por lo tanto se tiene una única solución para cada sistema de ecuaciones determinado por $\mu \in W$, dado justamente por $u = -\Delta^{-1}\mu$.

La función $u \in V$ pertenece al núcleo de Δ si y solo si

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Gracias al principio del mínimo dado en el Lema 2, obtenemos que $u \geq 0$ en \mathbb{Z}^2 . Si aplicamos el mismo razonamiento a $-u$ obtenemos la otra desigualdad de donde concluimos $u = 0$, es decir que el núcleo de Δ es trivial y por lo tanto Δ es biyectiva. \square

2.2.1. Ejercicio 3. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, demuestra que existe una única solución $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para el sistema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Las funciones que satisfacen $\Delta u = 0$ en Ω se dicen armónicas en Ω . Geométricamente, el valor de u sobre cualquier $x \in \Omega$ es exactamente el promedio de los valores en las casillas adyacentes. Más adelante veremos una fórmula para calcular estas soluciones en términos del núcleo de Poisson que definiremos luego de la demostración del teorema del barrendero. De momento damos la siguiente pista para resolver el ejercicio, si u resuelve el problema que se propone, entonces ¿qué ecuación resolvería $v := u - \varphi$?

2.3. Demostración del teorema del barrendero. Ya estamos listos para demostrar nuestro resultado principal. Algunos pasos en la demostración se explican en términos más intuitivos que rigurosos. Esperamos que esta metodología tenga un mayor alcance pedagógico y esperamos que los lectores más inclinados a los aspectos rigurosos puedan llenar los detalles más técnicos en la demostración.

Demostración del Teorema 1. Asumiendo la notación e hipótesis del teorema, definimos de forma recursiva y partiendo de $u_0 := 0$ las funciones $u_k := u_{k-1} + \mu_{k-1} \mathbb{1}_{b_k}$ las cuales son nulas en el complemento de Ω y verifican la ley de conservación. En términos de ecuaciones para estas funciones tenemos que

$$\begin{cases} \Delta u_k = \mu_k - \mu \text{ en } \Omega, \\ u_k = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Definimos también $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Gracias al resultado de existencia y unicidad (Corolario 3) sabemos que u está bien definida y de su construcción queda claro que es independiente de los planes de barridas.

Para concluir la demostración verificaremos los siguientes pasos:

1. $\mu_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$ está bien definida.
2. $u_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ está bien definida.
3. $u_\infty = u$.

Con esta estrategia podemos de hecho concentrarnos en un solo plan de barridas y obviar el otro.

Para establecer los primeros dos puntos usaremos que toda sucesión no-decreciente y acotada por arriba, necesariamente tiene un límite.

Para ver el primer punto basta con fijarse en el comportamiento de μ_k en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, ya que sabemos por hipótesis que estas tienden a cero en Ω . Afortunadamente tenemos que en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ se tiene que μ_k es una sucesión no-decreciente de funciones tal que $\mu_k - \mu$ está mayorizada por el total de arena que inicialmente está en Ω . La monotonía de μ_k en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ se tiene porque ninguna barrida pasa por las casillas en el complemento de Ω , solamente podemos ir sacando arena hacia el complemento. La cota para $\mu_k - \mu$ en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ se debe en cambio a que no podemos depositar más arena en $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ que el total que se encuentra originalmente en Ω . Es decir, que para $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$

$$\mu_0(x) \leq \mu_1(x) \leq \mu_2(x) \leq \dots \leq \sum_{y \in \Omega} \mu(y) + \mu(x).$$

Con este razonamiento ya hemos justificado la existencia del límite en el primer paso.

De la propia construcción de $\{u_k\}_{k \geq 0}$ se puede ver que esta forma una sucesión no-decreciente de funciones, puesto que en cada iteración $u_k - u_{k-1} = \mu_{k-1}(b_k) \mathbb{1}_{b_k} \geq 0$. Basta con probar que $u \geq u_k$ para

demostrar el segundo punto (y como bono obtener la mitad de lo que nos hace falta para el tercer punto, $u \geq u_\infty$). Gracias a la linealidad del Laplaciano tenemos que la diferencia $v_k := u - u_k$ satisface

$$\begin{cases} \Delta v_k = \Delta u - \Delta u_k = -\mu - (\mu_k - \mu) = -\mu_k \leq 0 \text{ en } \Omega, \\ v_k = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Del principio mínimo (Lema 2) se deduce que $v_k \geq 0$ y por lo tanto $u \geq u_k$.

Ahora que sabemos que los límites μ_∞ y u_∞ están bien definidos, y dado que $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ barre a μ de Ω , tenemos que tomando $k \rightarrow \infty$ en el sistema para u_k

$$\begin{cases} \Delta u_\infty = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u_\infty = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Por la unicidad de soluciones del problema lineal (Corolario 3) llegamos a que necesariamente $u_\infty = u$.

Recordemos que de hecho la conservación de masa $\Delta u_k = \mu_k - \mu$ es una igualdad válida en todo \mathbb{Z}^2 . Una vez establecidos los tres pasos concluimos la demostración haciendo notar que de la fórmula anterior se tiene que en el límite μ_∞ se puede calcular a partir de

$$\mu_\infty = \mu + \Delta u_\infty = \mu + \Delta u,$$

una identidad que es independiente del plan de barridas dado que por definición μ y u son independientes del plan. \square

Nuestro teorema garantiza que para cualquier $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ se tiene que si μ puede ser barrido de Ω , entonces la distribución de arena que queda por fuera de Ω es independiente del plan. Queda abierta la pregunta de si podemos en todo caso barrer o no a μ de Ω . Te invitamos a que demuestres el siguiente resultado. En la justificación es útil que pienses en algunas de las técnicas que fueron ilustradas en la demostración anterior.

Teorema 4. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ existe por lo menos un plan $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ que barre a μ de Ω .*

2.3.1. *Ejercicio 4.* Demuestra el teorema.

2.4. El núcleo de Poisson. Los teoremas anteriores nos permiten dar un sentido riguroso a la siguiente construcción. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito buscamos definir una transformación P_Ω la cual toma una distribución de arena $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ (o equivalentemente un vector de $[0, \infty)^{\mathbb{Z}^2}$) y devuelve la distribución de arena μ_∞ que resulta al barrer μ de Ω . En

la siguiente definición podemos de hecho considerar distribuciones con valores negativos.

Definición 1. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito, definimos el núcleo de Poisson como la transformación $P_\Omega : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$ tal que

$$P_\Omega(\mu) = \mu + \Delta u,$$

donde u es la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Observamos que dado $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que el resultado de la transformación vuelve a ser una función $P_\Omega(\mu) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la cual se anula en Ω . Los valores más interesantes son justamente $P_\Omega(\mu)(y)$ para $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$. Por dar un ejemplo ilustrativo que usaremos más adelante tenemos que

$$P_{\{x_0\}}(\mathbb{1}_{x_0})(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ si } y \sim x_0, \\ 0 \text{ en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Equivalentemente

$$P_{\{x_0\}}(\mathbb{1}_{x_0}) = \frac{1}{4} \sum_{x \sim x_0} \mathbb{1}_x.$$

De la linealidad del problema intuimos que P_Ω es debería ser lineal.

Lema 5. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $\mu, \nu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$P_\Omega(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha P_\Omega(\mu) + \beta P_\Omega(\nu).$$

Demostración. Sean $u, v, w : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta v = -\nu \text{ en } \Omega, \\ v = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w = -(\alpha\mu + \beta\nu) \text{ en } \Omega, \\ w = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

por definición sabemos que

$$P_\Omega(\mu) = \mu + \Delta u,$$

$$P_\Omega(\nu) = \nu + \Delta v,$$

$$P_\Omega(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha\mu + \beta\nu + \Delta w.$$

Basta con demostrar que $w = \alpha u + \beta v$ para obtener de esta forma que

$$\begin{aligned} P_\Omega(\alpha\mu + \beta\nu) &= \alpha\mu + \beta\nu + \Delta w, \\ &= \alpha(\mu + \Delta u) + \beta(\nu + \Delta v), \\ &= \alpha P_\Omega(\mu) + \beta P_\Omega(\nu). \end{aligned}$$

Ambas funciones, w y $(\alpha u + \beta v)$, se anulan en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, y además cumplen $\Delta(\alpha u + \beta v) = \Delta w = -(\alpha\mu + \beta\nu)$ en Ω . Por la unicidad de soluciones podemos concluir la identidad esperada. \square

Gracias a esta linealidad observamos que solamente hace falta saber cómo actúa P_Ω sobre las distribuciones puntuales, es decir de la forma $\mathbb{1}_x$, para recuperar su comportamiento sobre una distribución arbitraria, la cuales se descomponen tomando la superposición

$$\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mu(x) \mathbb{1}_x.$$

En otras palabras

$$P_\Omega(\mu) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mu(x) P_\Omega(\mathbb{1}_x).$$

En la literatura es usual definir en cambio al núcleo de Poisson como $P_\Omega : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P_\Omega(x, y) := P_\Omega(\mathbb{1}_x)(y).$$

Es decir, la fracción de arena que recibe un bote en la casilla y cuando se barre de Ω un montoncito en x (con la excepción de que $P_\Omega(x, y) = 0$ si $y \in \Omega$). Incluso podríamos fijarnos exclusivamente en los casos donde $x \in \Omega$ y $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, dado que los otros escenarios son de alguna forma triviales. Cuando $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ no habría nada que barrer en Ω , y si $y \in \Omega$ entonces dicha casilla queda limpia al final de la secuencia de barridas.

2.4.1. Ejercicio 5. Demuestra que si $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ entonces

$$P_\Omega(x, y) = \mathbb{1}_x(y)$$

Por otro lado, para $x \in \mathbb{Z}^2$ y $y \in \Omega$ se tiene que

$$P_\Omega(x, y) = 0.$$

Gracias a la interpretación de núcleo de Poisson en términos del problema del barrendero es natural pensar que dados $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ finitos, se tiene que al barrer primero a Ω_1 y luego a Ω_2 , se obtiene lo mismo que al barrer solamente Ω_2 . En términos precisos tenemos el siguiente resultado. Puedes dar una demostración usando ideas parecidas a las que usamos para demostrar la linealidad.

Lema 6. *Dados $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ finitos se cumple que*

$$P_{\Omega_2} = P_{\Omega_2} \circ P_{\Omega_1}.$$

2.4.2. *Ejercicio 6.* Demuestra el lema.

Como consecuencia de la linealidad y el lema anterior tenemos la siguiente interpretación dual del núcleo de Poisson.

Lema 7. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito. Para $y \in \mathbb{Z}^2$ fijo, la función $u(x) := P_{\Omega}(x, y) = P_{\Omega}(\mathbb{1}_x)(y)$ es la solución de*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \mathbb{1}_y \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Demostración. La condición de borde se sigue del Ejercicio 5. Para $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$

$$P_{\Omega}(x, y) = \mathbb{1}_x(y) = \mathbb{1}_y(x).$$

Para verificar la ecuación usamos el Lema 6 con $\Omega_1 = \{x\} \subseteq \Omega$ y $\mu = \mathbb{1}_x$ tal que

$$P_{\Omega}(\mathbb{1}_x) = P_{\Omega}(P_{\{x\}}(\mathbb{1}_x)) = P_{\Omega}\left(\sum_{z \sim x} \frac{1}{4} \mathbb{1}_z\right) = \frac{1}{4} \sum_{z \sim x} P_{\Omega}(\mathbb{1}_z).$$

En otras palabras $\Delta_x P_{\Omega}(x, y) = 0$. □

El núcleo de Poisson nos ofrece así una solución particular de la ecuación $\Delta u = 0$ en Ω . Notemos por otro lado que las condiciones de borde de la forma $\mathbb{1}_y$ son suficientes para reconstruir cualquier otra condición de borde arbitraria gracias al principio de superposición. En otras palabras hemos llegado a la siguiente fórmula de representación.

Corolario 8. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito. La solución $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ del problema*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega, \end{cases}$$

puede escribirse en términos del núcleo de Poisson como

$$u(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega} \varphi(y) P_{\Omega}(x, y).$$

2.4.3. *Ejercicio 7.* Dado $n \in \mathbb{N}$, calcula el núcleo de Poisson para $\Omega = [1, n] \times \{0\} \cap \mathbb{Z}^2$.

3. PROBLEMA CONTINUO

Las herramientas que hemos desarrollado hasta este punto son una interpretación discreta de un método que a finales del siglo diecinueve logró dar respuesta a uno de los problemas más importantes en la teoría de funciones analíticas: La posibilidad de encontrar soluciones al problema de Dirichlet. En esta sección daremos un breve vistazo al modelo continuo resaltando sus analogías con el modelo discreto. Finalmente observaremos como aún hoy en día las técnicas que hemos descrito en esta nota se utilizan en matemáticas puras y distintas aplicaciones prácticas.

3.1. El Laplaciano. El Laplaciano de una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ doblemente diferenciable está dado por

$$\Delta u(x_0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0).$$

Este aparece motivado de forma geométrica cuando consideramos la diferencia entre los promedios de u en una esfera⁵ de radio $r \rightarrow 0^+$ y su valor en el centro⁶

$$(2) \quad \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) dS(x) = \frac{r^2}{2n} \Delta u(x_0) + o(r^2).$$

Recordemos que para $v : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene algo muy parecido aunque mucho más sencillo,

$$\Delta v(x_0) = \frac{1}{4} \sum_{x \sim x_0} v(x) - v(x_0).$$

Es decir la diferencia entre el promedio de v en los nodos adyacentes a x_0 y el propio valor de $v(x_0)$. En el caso discreto no tenemos que preocuparnos por el límite cuando el radio tiende a cero porque de hecho tenemos a la mano “el radio más pequeño”.

⁵Denotamos las bolas y las esferas respectivamente como

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\},$$

$$\partial B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r\}.$$

Si omitimos el centro es porque asumimos que este es el origen ($x_0 = 0$).

⁶El término $o(r^2)$ representa una función que tiende a cero más rápido que r^2 , es decir $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{o(r^2)}{r^2} = 0$.

Veamos rápidamente la demostración de la identidad (2). Tomando el cambio de variables $x = x_0 + r\theta$ y usando la expansión de Taylor

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) dS(x), \\ &= \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} \left(rDu(x_0) \cdot \theta + \frac{r^2}{2} \theta \cdot D^2u(x_0)\theta + o(r^2) \right) dS(\theta). \end{aligned}$$

La integral del primer término en el lado derecho se cancela por la simetría impar del integrando sobre la esfera.

Para el segundo término tenemos que

$$\int_{\partial B_1} \theta \cdot D^2u(x_0)\theta dS(\theta) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \int_{\partial B_1} \theta_i \theta_j dS(\theta).$$

Los términos con $i \neq j$ se cancelan igualmente por simetría impar. Restan así los términos donde $i = j$ para los cuales se tiene que una vez más por simetría

$$\int_{\partial B_1} \theta_1^2 dS(\theta) = \dots = \int_{\partial B_1} \theta_n^2 dS(\theta) = \frac{1}{n} \int_{\partial B_1} \sum_{i=1}^n \theta_i^2 dS(\theta) = \frac{|\partial B_1|}{n}.$$

Dado que $\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = 1$ para $\theta \in \partial B_1$.

Como conclusión tenemos que cuando reunimos los términos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) dS(x) &= \frac{r^2}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) + o(r^2), \\ &= \frac{r^2}{2n} \Delta u(x_0) + o(r^2). \end{aligned}$$

Ciertamente la fórmula que hemos demostrado es ilustrativa desde el punto de vista geométrico pero poco práctica para calcular. En ese caso se suele usar en cambio la suma de las segundas derivadas.

Si aproximamos a las derivadas de una función usando los cocientes incrementales obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + (\varepsilon/2)e_i) - u(x - (\varepsilon/2)e_i)}{\varepsilon}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial_i u(x + (\varepsilon/2)e_i) - \partial_i u(x - (\varepsilon/2)e_i)}{\varepsilon}, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon e_i) - 2u(x) + u(x - \varepsilon e_i)}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} \frac{1}{2n} \sum_{y \sim_{\varepsilon} x} (u(y) - u(x))$$

donde tomamos $y \sim_{\varepsilon} x$ si y es de la forma $x \pm \varepsilon e_i$. Hemos descubierto así la segunda analogía entre los Laplacianos discretos y continuos.

Otras propiedades que igualmente se cumplen para el Laplaciano continuo son el principio del mínimo y la existencia de un núcleo de Poisson (o la medida armónica) para un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y bajo ciertas hipótesis. Para aquellos lectores que ya han tomado un curso de ecuaciones diferenciales parciales, seguramente ya se habían encontraron con algunas de estas ideas en sus cursos. Para los que aún no lo han hecho esperamos haber alimentado la curiosidad para embarcar el viaje en una hermosa disciplina de las matemáticas.

Apenas vimos un modelo que enfatiza una ley de conservación o un fenómeno de difusión. Las conexiones con distintas áreas son de hecho abundantes, tanto en física (electromagnetismo, mecánica de fluidos, mecánica estadística, cuántica, etc), biología (dinámica de poblaciones), geometría (flujos geométricos, superficies mínimas), probabilidad (modelos estocásticos, finanzas), optimización (penalización por gradiente), y pare usted de contar. Una amena referencia que ilustra las conexiones con probabilidad y redes eléctricas es *Random Walks and Electric Networks* por Peter G. Doyle y J. Laurie Snell [5].

3.2. Un breve vistazo a la historia del balayage. Las ecuaciones diferenciales nacieron a partir de la formulación matemática de distintos procesos y modelos físicos. Gracias a la teoría mecánica de Newton podemos entender la evolución de sistemas de cuerpos representados por parámetros puntuales que describen distintas configuraciones (posiciones, velocidades, ángulos, etc.). Sin embargo, no todos los fenómenos naturales pueden ser descritos puntualmente por una cantidad finita de parámetros, pensemos en cambio en fluidos como lo son los líquidos o los gases, la descripción de una membrana en reposo, o incluso modelos poblacionales donde la gran cantidad de individuos hace poco práctico hacer seguimiento de cada uno de los agentes. En estos casos son necesarias las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). La importancia de las EDPs en física fue reconocida tan pronto como el cálculo diferencial e integral fue establecido durante los siglos diecisiete y dieciocho. Tengamos en cuenta que incluso hasta mediados del siglo diecinueve podría decirse que, física, matemáticas e ingenierías formaban parte de una misma disciplina.

Durante siglo diecinueve las matemáticas comenzaron a establecer las bases axiomáticas del cálculo, reemplazando las motivaciones físicas e intuitivas por demostraciones rigurosas. En esta división entre matemáticas puras y las ciencias aplicadas, las EDPs habitaban una zona fronteriza, siendo muy aplicadas a fenómenos reales para merecer el análisis abstracto. Sin embargo, no tardaría en llegar el momento en que se descubriese que las EDPs juegan un rol protagónico dentro de las mismas bases abstractas de las matemáticas.

Podemos decir que fue en el análisis de funciones complejas, y en particular la tesis de Riemann en 1851, donde las EDPs hacen su primera aparición dentro de las matemáticas. Las simetrías de los números complejos son una poderosa herramienta que (contradictorio a su nombre) simplifican el cálculo real. El punto de partida son las funciones de la forma $f = u + iv$ diferenciables de los complejos en si mismo los cuales identificamos por $z = x + iy$. Para que la definición de la derivada sea consistente en este caso es necesario que las partes real e imaginaria de f satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De esta forma descubrimos adicionalmente que u y v son funciones armónicas dado que

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0, \\ \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0. \end{aligned}$$

Un punto clave en célebre teorema del mapeo de Riemann, uno de los resultados más importantes en análisis complejo y geometría de superficies, consiste en la posibilidad de encontrar soluciones para la ecuación de Laplace en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ con un dato de borde continuo φ

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hasta ese momento, la resolución de dicha ecuación no era realmente una prioridad en el análisis matemático. Con ella se modela por ejemplo la distribución de temperatura en una placa dada por Ω y por lo tanto su resolución era palpable. Riemann teniendo en cuenta que tales justificaciones no serían suficientes para los estándares que se estaban estableciendo para ese entonces justificó la resolución de la ecuación haciendo notar que esta es la ecuación de punto crítico cuando buscamos

minimizar el funcional⁷ de Dirichlet

$$u \mapsto \mathcal{D}[u] := \int_{\Omega} \|Du\|^2 dx.$$

Dado que dicho funcional es no-negativo, quedaba “claro” que donde se alcanzara el mínimo, bajo la restricción $u = \varphi$ en $\partial\Omega$, tendría que encontrarse la solución buscada.

Veamos rápidamente que queremos decir con esta idea de la ecuación de punto crítico. Sea $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave tal que $\eta = 0$ en $\partial\Omega$. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ realiza el mínimo de $\mathcal{D}[u]$ bajo la restricción $u = \varphi$ en $\partial\Omega$ entonces $f(\varepsilon) := \mathcal{D}[u + \varepsilon\eta]$ alcanza su mínimo en $\varepsilon = 0$. Usando que en los mínimos de una función se tiene que al derivada se anula encontramos que

$$0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega} \|D(u + \varepsilon\eta)\|^2 dx = 2 \int_{\Omega} Du \cdot D\eta dx = -2 \int_{\Omega} \eta \Delta u dx.$$

La última igualdad se obtiene usando integración por partes y el hecho que $\eta = 0$ en $\partial\Omega$. Dado que dicha identidad debe ser cierta para η arbitraria se deduce que $\Delta u = 0$ en Ω .

Weierstrass hizo notar que este razonamiento aún carecía de rigor matemático. No cualquier función no negativa (o en general acotada por debajo) debe tener necesariamente un mínimo, por ejemplo pensemos en la función exponencial en los reales. De hecho, en 1871 Friedrich Prym encontró un caso para $\Omega = B_1$ donde existe una función continua φ en la circunferencia pero sin embargo para cualquier función continua que satisface $u = \varphi$ en ∂B_1 se tiene que $\mathcal{D}[u] = \infty$. Quedaba definitivamente abierta la validez del análisis complejo que tantos avances había logrado en múltiples áreas de las matemáticas.

Simultáneamente a esta crisis, Hermann Schwarz, otro prominente matemático reconocido por sus trabajos en análisis complejo, había propuesto un ingenioso método para resolver la ecuación de Laplace en un dado dominio $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ que se descompone en otros más sencillos Ω_1 y Ω_2 . Gracias los trabajos de Fourier, Gauss, Green y Poisson entre otros, se conocen fórmulas de representación para la solución de la ecuación de Laplace con un dato de borde dado cuando el dominio es por ejemplo un rectángulo o una bola, con esto nos referimos a esta clase de “dominios sencillos”. Cuando en cambio tenemos $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ se tiene que la solución del problema de Dirichlet se recupera en el límite cuando, partiendo de una función u_0 tal que $u_0 = \varphi$ en $\partial\Omega$,

⁷Un funcional es una función que es evaluada a su vez sobre otra función

resolvemos alternadamente los problemas

$$\begin{cases} \Delta u_{2k+1} = 0 \text{ en } \Omega_1, \\ u_{2k+1} = u_{2k} \text{ en } \overline{\Omega} \setminus \Omega_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_{2k} = 0 \text{ en } \Omega_2, \\ u_{2k} = u_{2k-1} \text{ en } \overline{\Omega} \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

Heurísticamente, comenzamos con un candidato u_0 que a pesar de tomar los valores deseados en la frontera puede no tener el Laplaciano que necesitamos. En cada iteración lo que vamos haciendo es justamente “barrer el Laplaciano” de la función dada en el sub-dominio donde sabemos exactamente como resolver la ecuación de Laplace.

Esta idea se generaliza sin problema al caso donde Ω es la unión de más de dos subdominios, incluso una cantidad numerable de ellos. No solamente desde un punto de vista práctico esta metodología ofrece una idea útil, sino también desde el teórico. Tengamos en cuenta que cualquier dominio se descompone como unión de bolas (por ser un conjunto abierto). Esta última observación en el caso numerable probablemente no tendría mucho valor práctico a la hora de calcular soluciones, sin embargo fue clave en el análisis de Poincaré.

Felizmente (y casi cuarenta años después de la tesis de Riemann) Henri Poincaré completó el análisis riguroso de este método, hoy conocido como balayage que se traduce como barrer [7]. La idea consiste en tomar una sucesión de bolas $B_1, B_2, \dots \subseteq \Omega$ tales que para cualquier $x \in \Omega$ se cumple que x pertenece a un número infinito de bolas de la sucesión. Comenzando con una función continua $u_0 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u_0 = \varphi$ en Ω , definimos las iteraciones $u_k : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 \text{ en } B_k, \\ u_k = u_{k-1} \text{ en } \overline{\Omega} \setminus B_k. \end{cases}$$

El reto consiste en demostrar que $u_k \rightarrow u$ donde $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, doblemente diferenciable en Ω y satisface

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \overline{\Omega} \setminus B_k. \end{cases}$$

A pesar de las similitudes que podemos encontrar con el problema del barrendero, el tratamiento en el caso continuo es mucho más delicado, pensemos por un momento algunos de los obstáculos que nos encontraremos en este escenario. Mientras que para sistemas lineales de dimensión finita con igual número de incógnitas que de ecuaciones, la biyectividad es equivalente a la inyectividad esto no necesariamente se cumple en sistemas de dimensión infinita como el que tenemos en el caso de la EDP. Por otro lado, la convergencia puntual de $u_k \rightarrow u$ no es suficiente para decir que u hereda las ecuaciones que satisface

la sucesión, es necesario tener un control más estricto de las soluciones. Abordar estos aspectos de forma rigurosa, usando por ejemplo el principio del mínimo y la desigualdad de Harnack, es lo que hace de la demostración de Poincaré uno de los avances más significativos de su época en el análisis de EDPs.

Ya entrado el siglo veinte, Oskar Perron encontraría una útil y profunda interpretación al método de Balayage [6]. Cuando adicionalmente pedimos que $\Delta u_0 \leq 0$ obtenemos que $\{u_k\}$ es una sucesión decreciente de funciones super-armónicas, es decir que también satisfacen $\Delta u_k \leq 0$ (en un cierto sentido débil). Por lo tanto podemos decir que u es el ínfimo de una familia de funciones super-armónicas. Más aún, por el principio del mínimo sabemos que cualquier función super-armónica que tenga el mismo dato de borde que la solución u debe necesariamente mayorizar la solución u . El método de Perrón dice así que la solución del problema de Dirichlet se obtiene justamente como la envolvente inferior de la familia de funciones super-armónicas que toman el dato de borde prescrito. Mucho más recientemente a partir de los años ochenta, estas ideas basadas en el principio de comparación han motivado la teoría de soluciones viscosas [4], las cuales son una de las áreas de investigación activas hoy en día en el análisis de EDPs.

Los esfuerzos por seguir analizando el funcional de Dirichlet, su posibilidad de encontrar mínimos, y cuando estos resuelven una ecuación diferencial son parte de otra historia muy interesante en la cual no haremos mayores comentarios. Solamente quisiéramos hacer notar que, teniendo en mente esta otra dirección, Hilbert propuso dos de sus veintitrés famosos problemas que guiarían el desarrollo de las matemáticas en el siglo veinte. En particular, mucho en el desarrollo del análisis funcional y de la teoría de la medida fue consecuencia de estas preguntas. Recomendamos el artículo de H. Brezis y F. Browder para información más detallada al respecto [1].

Uno de los aspectos que salta a la vista de esta breve historia es la retroalimentación entre la práctica intuición física con la abstracción y el desarrollo del análisis moderno. No vemos como algo negativo haber encontrado que la demostración de Riemann estaba incompleta, más bien representó la oportunidad de profundizar y consolidar aspectos que llevaron al desarrollo del análisis que hoy conocemos. Significó que el problema era mucho más interesante de lo que sospechábamos inicialmente. Por el otro lado, la intuición tampoco es una herramienta que debe ser descartada sino todo lo contrario. De hecho así lo manifestó en múltiples ocasiones el mismo Poincaré.

Esta interconexión entre matemáticas y física sigue muy presente hoy en día. Por poner un ejemplo famoso, la conjetura de Poincaré, la

cual plantea una propiedad topológica abstracta para describir a las esferas, pudo ser resuelta gracias al programa de Richard Hamilton quien propuso en los años ochenta un flujo parabólico (el que describe la evolución del calor) para la métrica. Grigori Perelman es quien logra finalmente concluir a comienzos del siglo veintiuno el plan trazado por Hamilton. Su demostración, entre varios aspectos profundos de análisis, propone un cuidadoso control de la entropía del flujo, es decir una cantidad que originalmente conocemos por sus motivaciones en termodinámica y que a simple vista no es natural relacionar con geometría (aunque quizás no para Perelman y otros cuantos).

En el mundo práctico el método de balayage ha sido redescubierto en múltiples ocasiones. Hoy en día los métodos numéricos para resolver problemas de aprendizaje por refuerzo pueden ser considerados una adaptación de las iteraciones de Schwarz. De hecho, el mismo principio de programación dinámica en la teoría de control óptimo es también una manifestación de esta teoría. En la siguiente charla [2] discuto con mayor detalle las interconexiones con la teoría de control óptimo.

4. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

4.1. Ejercicio 1. En este caso obtenemos la serie

$$\frac{1}{64} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \dots \right) = \frac{1}{56}.$$

4.2. Ejercicio 2. Tenemos que si denotamos por u_i al valor de u en la casilla i , entonces el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} -u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4 = -1, \\ \frac{1}{4}u_1 - u_2 + \frac{1}{4}u_3 + \frac{1}{4}u_5 = 0, \\ \frac{1}{4}u_2 - u_3 = 0, \\ \frac{1}{4}u_1 - u_4 + \frac{1}{4}u_5 = 0, \\ \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4 - u_5 = 0. \end{cases}$$

La cantidad de arena que recibe el bote en el límite está dada así por

$$\mu_\infty((2, 0)) = \frac{1}{4}u_3 + \frac{1}{4}u_5 \sim 0,066.$$

4.3. Ejercicio 3. La existencia y unicidad de la solución u es equivalente a encontrar una única función $v := u - \varphi$ tal que

$$\begin{cases} \Delta v = -\mu \text{ en } \Omega, \\ v = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega, \end{cases}$$

donde $\mu = \Delta\varphi$. Sabemos que v existe de forma única gracias al Corolario 3.

4.4. Ejercicio 4. Sea $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ un plan que recorre cada casilla un número infinito de veces. Por ejemplo, cualquier plan periódico donde aparezcan todas las casillas de Ω . Esta condición implica que para cada $x \in \Omega$, existe un número infinito de sub-índices tales que $\mu_k(x) = 0$. Basta probar así que $\mu_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$ existe para deducir que $\mu_\infty = 0$ en Ω , es decir que $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ barre a μ de Ω .

Definimos u_k y u exactamente como en la demostración del Teorema 1. Recordemos que u_k es no-decreciente y (por el principio del mínimo) acotada por u , por lo tanto $u_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ está bien definida. Dado que $\mu_k = \mu + \Delta u_k$ tenemos que la existencia del límite para μ_k queda demostrada por la existencia del límite para u_k .

4.5. Ejercicio 5. Sea $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ y $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mathbb{1}_x \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dado que $-\mathbb{1}_x = 0$ en Ω , puesto que $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, tenemos que necesariamente $u = 0$ y por lo tanto

$$P_\Omega(x, y) = P_\Omega(\mathbb{1}_x)(y) = \mathbb{1}_x(y) + 0 = \mathbb{1}_x(y).$$

Por otro lado, para $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria sea $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Si $y \in \Omega$ entonces

$$P_\Omega(\mu)(y) = \mu(y) + \Delta u(y) = \mu(y) - \mu(y) = 0.$$

En particular $P_\Omega(x, y) = P_\Omega(\mathbb{1}_x)(y) = 0$.

4.6. Ejercicio 6. Sea $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria y $u, v, w : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega_1, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega_1. \\ \Delta v = -P_{\Omega_1}(\mu) \text{ en } \Omega_2, \\ v = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega_2. \\ \Delta w = -\mu \text{ en } \Omega_2, \\ w = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

por definición sabemos así que

$$\begin{aligned} P_{\Omega_1}(\mu) &= \mu + \Delta u, \\ P_{\Omega_2}(P_{\Omega_1}(\mu)) &= P_{\Omega_1}(\mu) + \Delta v, \\ P_{\Omega_2}(\mu) &= \mu + \Delta w. \end{aligned}$$

Basta con demostrar que $w = u + v$ para obtener de esta forma que

$$P_{\Omega_2}(\mu) = \mu + \Delta w = \mu + \Delta u + \Delta v = P_{\Omega_1}(\mu) + \Delta v = P_{\Omega_2}(P_{\Omega_1}(\mu)).$$

Ambas funciones, w y $(u + v)$, se anulan en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, veamos entonces que $\Delta(u + v) = \Delta w = -\mu$ en Ω_2 para concluir por unicidad la identidad esperada.

En $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ tenemos que $P_{\Omega_1}(\mu) = 0$ y por lo tanto $\Delta(u + v) = -\mu + P_{\Omega_1}(\mu) = -\mu$. En el complemento $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ usamos que $\Delta v = -P_{\Omega_1}(\mu) = -(\mu + \Delta u)$ y por lo tanto $\Delta(u + v) = -\mu$. Esto concluye la demostración.

4.7. Ejercicio 7. Calcularemos $P_{\Omega}(x, y)$ en los casos no triviales los cuales están dados por $x \in \Omega = [1, n] \times \{0\}$ e $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ tal que es adyacente a por lo menos una casilla de Ω . En cada uno de los casos a continuación fijaremos y y denotaremos por $p_i := P_{\Omega}((i, 0), y)$ para $i \in [0, (n + 1)]$.

Caso 1: Si $y = (n + 1, 0)$ tenemos que p_i satisface

$$p_0 = 0, \quad p_{n+1} = 1, \quad p_{i+1} + p_{i-1} = 4p_i.$$

Para esta recurrencia se tiene el polinomio característico $P(x) = x^2 - 4x + 1$ cuyas raíces son $r_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}$. Por lo tanto

$$p_i = A_+ r_+^i + A_- r_-^i.$$

De las condiciones de borde vemos que

$$A_+ = -A_- = \frac{1}{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}.$$

Es decir que para $i \in \{0, 1, \dots, n, (n + 1)\}$

$$P_{\Omega}((i, 0), (n + 1, 0)) = \frac{r_+^i - r_-^i}{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}$$

y en los demás casos sería cero.

El caso $y = (0, 0)$ es simétrico y da como resultado

$$P_{\Omega}((i, 0), (0, 0)) = \frac{r_+^{n+1-i} - r_-^{n+1-i}}{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}.$$

Caso 2: Si $y = (j, 1)$ con $j \in [1, n]$ tenemos que p_i satisface para $i \neq j$

$$p_0 = 0, \quad p_{n+1} = 0, \quad p_{i+1} + p_{i-1} = 4p_i.$$

Para $i = j$ se tiene en cambio que

$$p_{j+1} + p_{j-1} + 1 = 4p_j.$$

Para analizar este caso partimos el intervalo $[1, n]$ en los sub-intervalos $[1, j]$ y $[j, n]$ y procedemos como en el caso anterior, siendo p_j un parámetro por ser fijado. Tenemos de esta forma que

$$p_i = \begin{cases} A(r_+^i - r_-^i) & \text{si } i \in [0, j], \\ B(r_+^{n+1-i} - r_-^{n+1-i}) & \text{si } i \in [j, (n+1)]. \end{cases}$$

Para que las fórmulas coincidan en $i = j$ requerimos que

$$B = A \frac{r_+^j - r_-^j}{r_+^{n+1-j} - r_-^{n+1-j}}.$$

Finalmente la relación $p_{j+1} + p_{j-1} + 1 = 4p_j$ determina el coeficiente $A = 1/(4a - b - c)$ donde

$$a = r_+^j - r_-^j, \quad b = r_+^{j-1} - r_-^{j-1}, \quad c = \frac{r_+^j - r_-^j}{r_+^{n+1-j} - r_-^{n+1-j}} (r_+^{n-j} - r_-^{n-j}).$$

El caso restante $y = (j, -1)$ es muy similar al anterior.

REFERENCIAS

- [1] Haïm Brezis and Felix Browder. Partial differential equations in the 20th century. *Adv. Math.*, 135(1):76–144, 1998.
- [2] Héctor A. Chang-Lara. Introducción a las soluciones viscosas: Browniano vs. eikonal. <https://youtu.be/yg4qx5DYGm0>. Cibercoloquio latinoamericano, 25 de febrero del 2021.
- [3] Héctor A. Chang-Lara. Taller de ecuaciones diferenciales parciales elípticas. <http://personal.cimat.mx:8181/~hector.chang/emalca2021/>. EMALCA 2021, organizada por la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- [4] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1):1–67, 1992.
- [5] Peter G. Doyle and J. Laurie Snell. *Random walks and electric networks*, volume 22 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984.
- [6] Oskar Perron. Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. *Math. Z.*, 18(1):42–54, 1923.
- [7] H. Poincaré. Sur les equations aux dérivées partielles de la physique mathématique. *Amer. J. Math.*, 12(3):211–294, 1890.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CIMAT, GUANAJUATO, MEXICO
Email address: `hector.chang@cimat.mx`