Solucion del problema sección fácil número 10.

Pedro Mayorga: mayorga@cimat.mx

I. Planteamiento

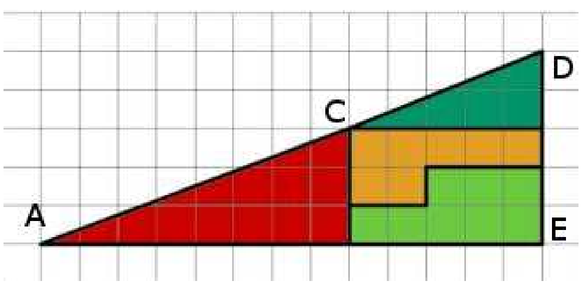
En el dibujo abajo el triángulo superior (*Fig.1(a)*) está partido en cuatro piezas que se fueron reacomodadas dentro del mismo triángulo; el resultado es el triángulo inferior (*Fig.1(b)*), pero un cuadrito no está cubierto . . . ¿ Como es posible?.

II. Solución

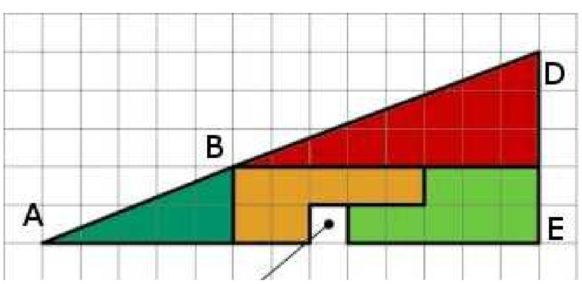
Esto es posible porque las pendientes de las šupestasȟipotenusas de los triángulos no están formadas por un segmento rectilíneo sino por dos, esto origina un paralelogramo entre estos cuatro segmentos, y dicho paralelogramo tiene área 1.

A. Prueba

El primer error es suponer, como afirma el problema que las figuras 1 son triángulos.



(a) Original



(b) Reordenada

Fig. 1. Figuras del problema.

Notar que las pendientes de la supuesta hipotenusa no es suave, ver Fig.2. Es decir la Fig.1(a) tiene coordenadas **A,B,D,E,A**, mientras que la Fig.1(b) tiene coordenadas **A,C,D,E,A**.

Es decir, hay una región entre Fig.1(a) y Fig.1(b) que debe tener área igual a 1, que es lo que falta en la Fig.1(b). Dicha región es el cuadrilátero **ABCD** de la Fig.2.

Ahora es solo cuestión de cálculos.

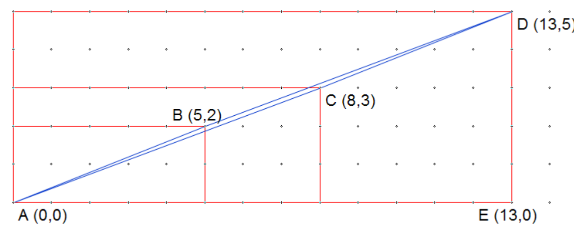


Fig. 2. Puntos clave de las pendientes.

Los triángulos ΔABC. y ΔBCD son congruentes porque:

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \sqrt{(5-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{29} \\
\overline{CD} &= \sqrt{(13-8)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{29} \\
\overline{BD} &= \sqrt{(5-13)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{73} \\
\overline{AC} &= \sqrt{(8-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{73}
\end{aligned}$$

entonces $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BD} = \overline{AC}$ y como $\overline{BC}$ es común, por lo tanto, se tiene que $\Delta ABC \equiv \Delta BCD$.

y como el área de ΔABC es:

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|(5)(3) - (2)(8)\right| = \frac{1}{2}\left|15-16\right| = \frac{1}{2}\left|-1\right| = \frac{1}{2}$$

tenemos que el area del paralelogramo **ABCD** es dos veces el área del triángulo **ABC** que es 1. Justo el área del cuadrito que falta en Fig.1(b).