SOLUCION DE PROBLEMA 4 ("AVANZADO")

LUIS SILVESTRE (ARGENTINA)

Voy a resolver el problema para un número arbitrario (n) de puntos sobre el círculo unidad. El motivo de esto es que 17 no tiene nada de particular y me da el mismo trabajo probarlo en general.

Primero voy a calcular el producto de todas las distancias entre los vértices de un n-ágono regular. Para esto voy a usar números complejos (cada número representa un punto en el plano complejo).

Las n raíces del polinomio $x^n - 1$ forman un polígono regular de n vértices y todos están en la circunferencia unidad. Es decir que me sirve para hacer la cuenta. Sean $z_1, \dots, z_n$ las raíces de $x^n - 1$ con $z_1 = 1$. El producto de todas las distancias a z_1 es igual a

$$\prod_{2 \leq i \leq n} |1 - z_j| = \left| \prod_{2 \leq i \leq n} (1 - z_j) \right|.$$

Pero

$$\prod_{2 \leq i \leq n} (x - z_j) = (x^n - 1)/(x - 1) = x^n + x^{n-1} + \cdots + 1.$$

Por lo tanto:

$$\prod_{2 \leq i \leq n} |1 - z_j| = \left| \prod_{2 \leq i \leq n} (1 - z_j) \right| = 1^n + 1^{n-1} + \cdots + 1 = n.$$

Por lo tanto, el producto de todas las distancias entre un vértice dado y los demás es n. Multiplicando esto n veces (una por cada vértice) y teniendo en cuenta que a cada distancia la estoy multiplicando dos veces (una vez por cada extremo), me queda que el producto de todas las distancias es $(n^n)^{1/2} = n^{n/2}$

Ahora voy a probar que este valor es efectivamente el máximo.

Sean $z_1, z_2, \dots, z_n$ los n vértices. Entonces el producto de todas las distancias, que llamaré $p(z_1, \dots, z_n)$, es igual a

$$p(z_1, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| = \left| \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j) \right|$$

Pero esto es casualmente la fórmula del determinante de la matriz de Vandermonde:

$$p(z_1, \dots, z_n) = \left| det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \right| = |det(V)|,$$

Date: 5 Oct. 99.

donde V es la matriz de Vandermonde. Sean $s_1, s_2, \ldots, s_n$ los valores singulares de V. Entonces $p = |\prod s_i|$.

Usando la norma 2 de la matriz, $\|V\|_2 = tr(V^*V)$, tenemos:

$$\sum |s_i|^2 = \|V\|_2 = \sum_{i,j} |V_{ij}|^2 = n^2,$$

porque todos los V_{ij} tienen módulo 1.

Se sabe que la media geométrica de n números positivos no es mayor que la media cuadrática. Aplicando esto a los valores singulares:

$$\sqrt[n]{\prod |s_i|} \leq \left(\frac{\sum |s_i|^2}{n} \right)^{1/2} = n^{(1/2)}.$$

Por lo tanto:

$$p(z_1, \ldots, z_n) = |det(V)| = \prod s_i \leq n^{(n/2)}.$$

En particular, cuando n=17, el valor máximo es $17^{17/2}$.

E-mail address: luis@oma.org.ar