SOBRE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS ACOTADAS EN $\mathbb{Z}^2$

ALEJANDRO KOCSARD

Problema: Diremos que una función $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ es *armónica* si para todos $n, m \in \mathbb{Z}$ se verifica:

$$f(m,n) = \frac{f(m+1,n) + f(m,n+1) + f(m-1,n) + f(m,n-1)}{4}.$$

Probar que toda función armónica acotada es necesariamente constante.

Solución: Sea la función $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(m,n) := f(m+1,n), \quad \forall\, m,n \in \mathbb{Z}.$$

g es claramente armónica. Por otra parte, cualquier combinación lineal de funciones armónicas es armónica. Luego, la función $h := f - g$ es también armónica.

Del hecho de que f es acotada, y por ende g también, se sigue que

$$S := \sup_{m,n \in \mathbb{Z}} |h(m,n)| < \infty.$$

Si $S = 0$ y f no es constante, entonces existirá $r \neq 0$ tal que:

$$f(m,n) = f(0,0) + nr, \quad m,n \in \mathbb{Z}.$$

Y de esta manera, f no es acotada, lo cual contradice la hipótesis del problema.

Entonces sea $S > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$S = \sup_{m,n \in \mathbb{Z}} h(m,n),$$

ya que si lo anterior no fuese cierto, entoces tendríamos

$$S = \sup_{m,n \in \mathbb{Z}} -h(m,n),$$

y en ese caso trabajaríamos con $-h$ (que también es una función armónica) en lugar de h.

Sea k un número natural arbitrario, y sea $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tal que

$$h(a,b) > S - \frac{S/2}{4^k}.$$

Dado que h es armónica, tenemos

$$\frac{1}{4}(h(a+1,b) + h(a,b+1) + h(a-1,b) + h(a,b-1)) = h(a,b) > S - \frac{S/2}{4^k}.$$

Considerando que $h \leq S$, conluímos, de la última desigualdad, que

$$\frac{1}{4}(h(a+1,b) + 3S) > S - \frac{S/2}{4^k},$$

y de ahí sigue que

$$h(a+1,b) > S - 4\frac{S/2}{4^k} = S - \frac{S/2}{4^{k-1}}.$$

En forma general, repitiendo el razonamiento anterior, se concluye que:

$$h(a+i,b) > S - \frac{S/2}{4^{k-i}} > \frac{S}{2}, \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

De esto último surge:

$$f(a+k,b) - f(a,b) = \sum_{i=0}^{k-1} h(a+i,b) > k\frac{S}{2},$$

lo cual, dada la arbitrariedad de k, contradice la acotación de f. $\square$

E-mail address: akocsard@fceia.unr.edu.ar