

# La geometría de trayectorias de bicicletas

Gil Bor, CIMAT, A.P. 402, Guanajuato, Gto. 36000, Mexico; [gil@cimat.mx](mailto:gil@cimat.mx)

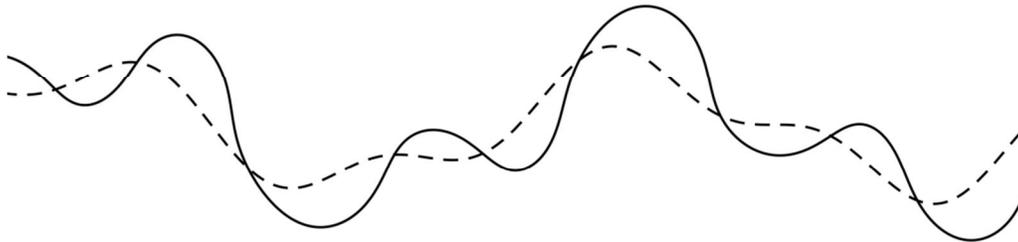
Sergei Tabachnikov, Department of Mathematics, Penn State, University Park, PA 16802, USA; [tabachni@math.psu.edu](mailto:tabachni@math.psu.edu)

---

La bicicleta es un objeto fascinante desde muchos puntos de vista, tanto prácticos como teóricos. En esta nota nos enfocamos en algunas propiedades geométricas de las trayectorias de bicicleta.

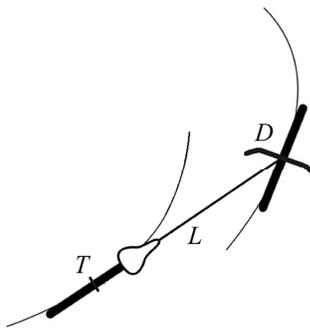
## ¿En qué dirección viajaba la bicicleta?

A primera vista, el par de trayectorias que dejan las ruedas delantera y trasera de una bicicleta sobre un terreno arenoso o lodoso parecen un par de curvas aleatorias; sin embargo, este no es el caso. Miremos por ejemplo las dos curvas de la siguiente figura:

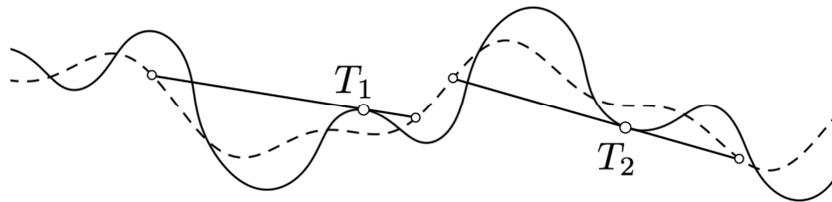


Basado únicamente en la forma de las trayectorias, mostraremos cómo deducir cuál de éstas corresponde a la rueda delantera y cuál a la trasera; incluso podemos decidir en qué dirección viajaba la bicicleta (de izquierda a derecha o al revés).

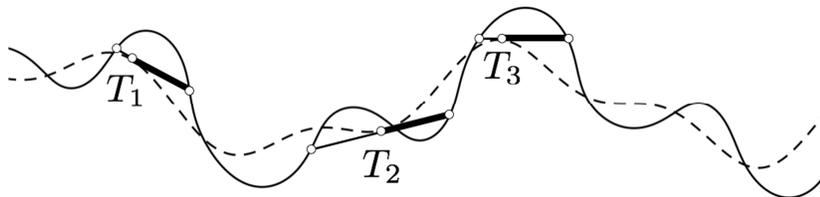
Para analizar la situación utilizamos un modelo simple para el movimiento de la bicicleta: en la figura siguiente, la bicicleta se representa por un segmento  $TD$  de longitud fija  $L$ , que conecta el centro de la rueda trasera  $T$  con el de la delantera  $D$ . La única restricción que imponemos al movimiento del segmento  $TD$  es la condición de “no derrapar”, es decir, *en cada momento el segmento  $TD$  es tangente a la trayectoria de la rueda trasera*.



Regresamos ahora a la figura inicial con el par de trayectorias y suponemos primero que una de ellas, digamos la sólida, es la trasera. Para comprobar si esto es cierto, trazamos una recta tangente a esta curva en algún punto  $T_1$ , marcando las intersecciones de esta recta tangente con la otra curva (la punteada); estos puntos, a la izquierda y a la derecha de  $T_1$ , serían los candidatos para ser el centro de la rueda delantera. El segmento que une  $T_1$  a uno de estos puntos de intersección determinaría la longitud  $L$  de la bicicleta. Si repetimos este procedimiento en otro punto  $T_2$  de la curva sólida, obtenemos tamaños distintos de  $L$ , sin importar en qué dirección viajaba la bicicleta. Como el tamaño  $L$  de la bicicleta es fijo, concluimos que la curva sólida no puede ser la trayectoria de la rueda trasera.

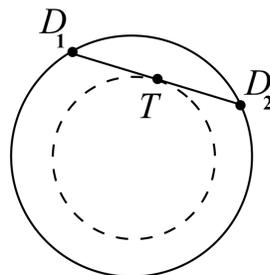


En cambio, si intentamos hacer lo mismo suponiendo que la otra curva (la punteada) es la trasera y la bicicleta viajaba de la izquierda hacia la derecha, obtenemos que los segmentos resultantes son del mismo tamaño, tal y como debe ser...

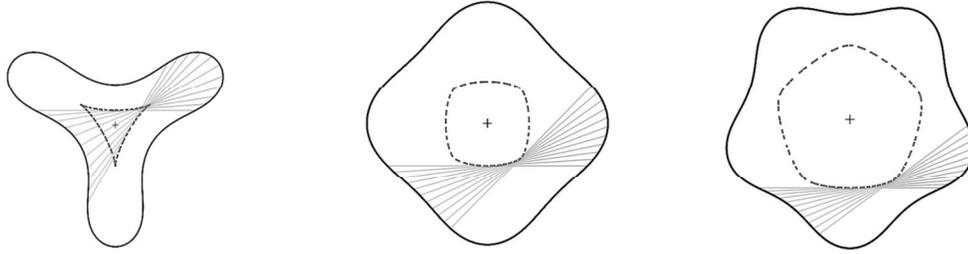


### “Trayectorias ambiguas”

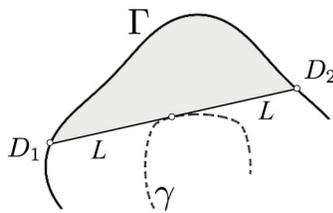
Típicamente, se puede decidir “en qué dirección viajaba la bicicleta”; sin embargo, en casos especiales no es posible. Un ejemplo trivial es el de un par de círculos concéntricos: el círculo interior es claramente la trayectoria trasera, sin embargo no se puede decidir en qué dirección se movió la bicicleta, ya que ambos sentidos, con o contra la manecillas del reloj, son consistentes con la condición de no derrapar.



Una pregunta natural es entonces: ¿Existen otros pares de “trayectorias ambiguas”, no circulares? La respuesta es positiva. A continuación mostramos tres ejemplos de tales trayectorias cerradas:



Este problema está relacionado con otros problemas muy interesantes. Notamos primero una caracterización de la trayectoria delantera  $\Gamma$  de un par “ambiguo”: si tomamos un segmento de longitud fija  $2L$ , lo apoyamos en  $\Gamma$  en dos puntos  $D_1, D_2$ , y lo deslizamos a lo largo de  $\Gamma$ , manteniendo sus extremos sobre  $\Gamma$ , su punto medio se mueve en la dirección del segmento mismo. Esto es porque el punto medio traza la curva trasera común  $\gamma$  a las dos bicicletas que forman el segmento  $D_1D_2$ , y por lo tanto, según la condición de no derrapar, debe ser tangente a  $\gamma$  en todo momento. Resulta que esta condición es también equivalente a que el área sombreada entre el segmento y el arco de  $\Gamma$  delimitado por él se mantiene constante al mover el segmento a lo largo de  $\Gamma$ .



Consideramos ahora dos problemas relacionados al problema de las “trayectorias ambiguas”.

### El problema de flotación de Ulam:

¿Cuáles cuerpos homogéneos flotan en equilibrio en todas las posiciones? (el “El libro escocés”, problema No 19, [S]).

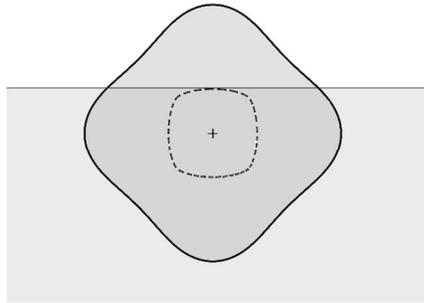
Stanislaw Ulam  
1909-1984



El “Café escocés”  
en Leópolis (Lviv), Ucrania  
(antes de la 2da Guerra  
Mundial era Lwow, Polonia)

En dimensión tres no se conoce ningún ejemplo más que el caso trivial de una esfera con densidad relativa menor que 1 y el problema sigue abierto. En dimensión dos (un “tronco flotante”), el problema es el mismo que encontrar la trayectoria delantera de un par de trayectorias ambiguas cerradas: el papel de la densidad relativa del tronco lo juega la longitud relativa del arco de la trayectoria delantera, sostenido por el segmento  $D_1D_2$  con longitud  $2L$ . Esta relación permite encontrar muchas soluciones no triviales al problema de flotación en dimensión dos. Sin embargo, hasta la fecha no se conocen todas estas curvas, a pesar de muchos

años de investigación por matemáticos como Aurbach [Au], Zindler [Zi], Wegner [We] y [BKTP].



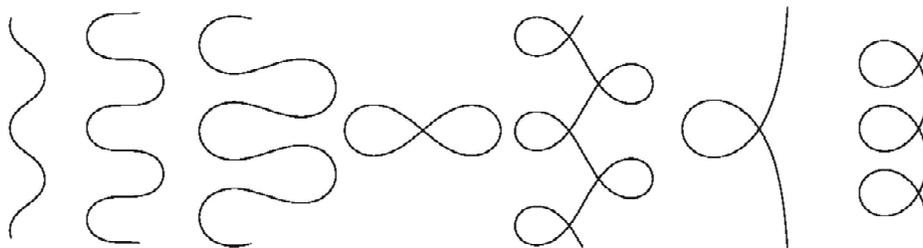
### Curvas elásticas

Las curvas elásticas fueron estudiadas desde hace siglos (Euler y Bernoulli) para modelar las formas que toman estructuras como vigas bajo estrés. Matemáticamente, son curvas que minimizan la curvatura cuadrada total, entre curvas con longitud fija (con extremos fijos o curvas cerradas).



Las soluciones de la ecuación diferencial asociada a este problema variacional se expresa en términos de las llamadas funciones elípticas, un tema clásico de análisis matemático.

Un problema variacional relacionado es el de las curvas elásticas *presurizadas*: las curvas que minimizan la curvatura cuadrada total, entre curvas con longitud y *área* fijas. Otra caracterización interesante de estas curvas (ya notada por Euler): las curvas elásticas son curvas cuya curvatura varía linealmente con la distancia a una recta fija en el plano; la curvatura de las curvas elásticas presurizadas varía cuadráticamente con la distancia a un punto fijo en el plano.



La relación con las trayectorias de bicicleta es la siguiente. Resulta que en casi todas las trayectorias ambiguas de bicicletas que conocemos, la trayectoria delantera es una curva elástica presurizada (las excepciones son las curvas delanteras que corresponden al problema de flotación de Ulam con densidad relativa  $\frac{1}{2}$ ; al aparecer forman una clase de curvas muy distintas). La

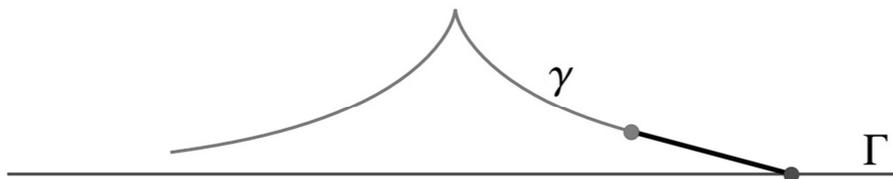
relación entre los dos temas es actualmente un área activa de investigación. Recomendamos el sitio de web [We] para mayor información acerca de la curiosa relación entre las curvas elásticas y las trayectorias ambiguas, con muchos ejemplos y animaciones interesantes.

A continuación presentamos otras propiedades llamativas de las trayectorias de bicicletas, algunas clásicas, otras más recientes.

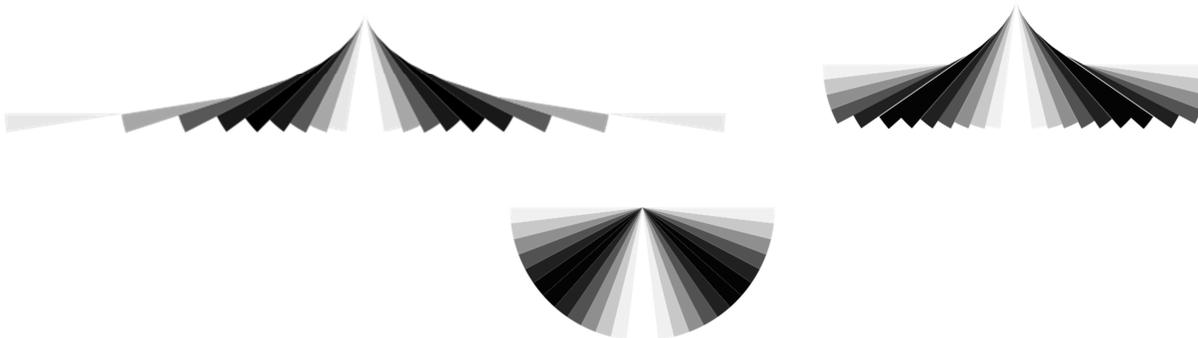
### La tractriz

El ejemplo más básico (no trivial) de trayectorias de bicicleta es cuando la trayectoria delantera,  $\Gamma$ , es una línea recta. Nota que si la bicicleta no está inicialmente alineada con  $\Gamma$  y corremos la rueda delantera hacia la izquierda sobre la recta  $\Gamma$  en la figura abajo, en algún momento la bicicleta se vuelve perpendicular a la  $\Gamma$  y se forma un “pico” en  $\gamma$ . La trayectoria trasera completa  $\gamma$  que resulta, infinita hacia la derecha y la izquierda, es una curva clásica llamada la *tractriz*.

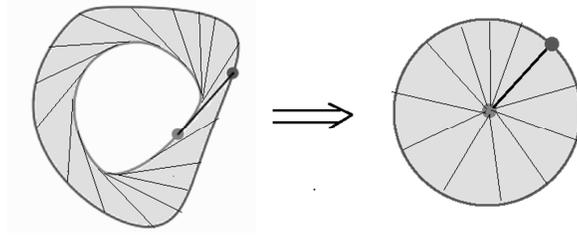
Pregunta: ¿cuál es el área abajo de la tractriz?



Respuesta:  $\pi L^2/2$ . Una demostración sin cálculo consiste en dividir el área en triángulos infinitesimales y luego trasladarlos para volver a formar un semi-disco de radio  $L$ .



Este mismo argumento se puede usar para demostrar una propiedad que comparten todas las trayectorias cerradas de bicicletas: el área atrapada entre las dos trayectorias es  $\pi L^2$ .



La tractriz es una curva con unas propiedades extraordinarias. Fue estudiada en los siglos XVII-XVIII (la “época de oro” del cálculo infinitesimal e integral) principalmente por Newton, Leibniz, Huygens y Euler.

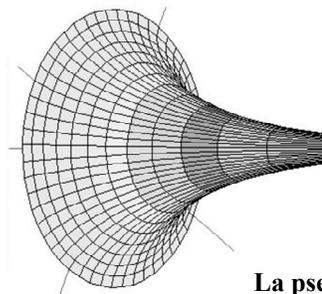
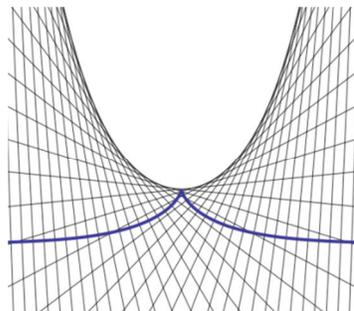
Christiaan Huygens  
1629-1695



Gottfried Wilhelm Leibniz  
1646 – 1716

Mencionamos aquí dos de sus propiedades: (1) la *evoluta* de la tractriz (la envolvente de sus rectas normales) es la *catenaria* (otra curva clásica “famosa”); (2) La superficie de revolución generada por la tractriz es la 'pseudo-esfera': una superficie de curvatura constante negativa (el nombre se debe a que la esfera ordinaria tiene curvatura constante positiva).

La catenaria es  
la evoluta de la  
tractriz.

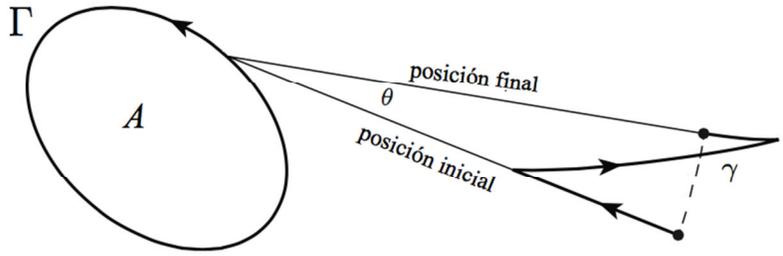
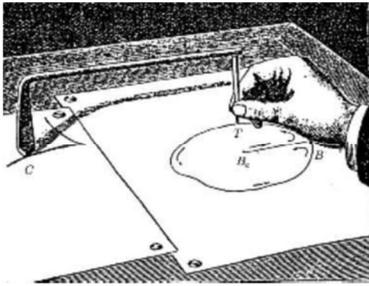


La pseudo esfera

### Monodromía, planímetros y la conjetura de Menzin

Si la rueda delantera atraviesa una trayectoria cerrada  $\Gamma$ , entonces la bicicleta típicamente no regresa a su orientación inicial, por lo que la trayectoria trasera no se cierra. La relación entre la orientación inicial y final de la bicicleta se llama la *monodromía* de  $\Gamma$ , y depende además de la longitud  $L$  de la bicicleta. La monodromía es, para cualquier  $\Gamma$  y  $L$ , una *transformada de Möbius*. Éstas se dividen en dos tipos genéricos: hiperbólicas y elípticas. Las transformadas hiperbólicas son las que tienen dos puntos fijos. Un punto fijo de la monodromía significa trayectoria trasera cerrada y son las que ocurren cuando la  $L$  es pequeña comparada con  $\Gamma$  (como suele suceder en una bicicleta verdadera). Las transformadas elípticas se parecen a rotaciones (sin puntos fijos) y ocurren cuando la bicicleta es suficientemente grande (ver más adelante). Esta es la base teórica del *planímetro de hacha* - un simple instrumento de medición de área de figuras, que fue

inventado a finales del siglo XIX por Holger Prytz, un oficial danés de caballería. Éste consiste en una barra metálica con una punta en un extremo y una cuchilla paralela a la barra por el otro. El perfil de la cuchilla es usualmente curvo, por lo que el aparato se llama el “planímetro de hacha”. Se utiliza guiando la punta a lo largo del perímetro  $\Gamma$  de la figura cuya área queremos medir, cuidando de no impartir ningún esfuerzo de torsión a la barra; como consecuencia, la cuchilla se desliza a lo largo de una curva  $\gamma$ , siempre tangente a la barra. Así que el planímetro satisface la condición de no derrapar, como en nuestro modelo de la bicicleta, con la punta y la cuchilla jugando el papel de la rueda delantera y trasera, respectivamente.



Parece casi increíble que algo tan simple (hasta primitivo) como el planímetro de hacha sirva para medir áreas. Si la figura es pequeña comparada con la longitud  $L$  de la barra, la cuchilla sigue una curva  $\gamma$  en forma de zigzag, similar a la curva seguida por las ruedas de un coche al estacionarse en un espacio reducido, como se muestra en la figura arriba a la derecha. Cuando la punta regresa a su posición inicial la barra del planímetro regresa a una orientación ligeramente distinta, formando un ángulo  $\theta$  con su orientación original. El área de la figura está dada aproximadamente por la fórmula  $A = \theta L^2$ . La falta de exactitud en esta fórmula la convierte matemáticamente en algo más interesante que otros aparatos populares de la época, la mayoría basados en el Teorema de Stokes del cálculo integral.

Como hemos mencionado arriba, para una bicicleta pequeña en comparación a la curva delantera  $\Gamma$ , la monodromía es hiperbólica, lo cual significa que admite dos puntos fijos, uno de ellos atractivo, resultando en una trayectoria trasera cerrada “atractora”. Según la *Conjetura de Menzin*, formulada en 1906, esto ocurre cuando  $A > \pi L^2$ . La conjetura duró abierta más de 100 años, hasta que fue demostrada finalmente en 2009 [LT].

\* \* \*

Hemos descrito algunas de las propiedades geométricas de las trayectorias de bicicleta y sus relaciones sorprendentes con otras áreas de las matemáticas. Hay muchos otros temas que no hemos tocado. Les recomendamos nuestros artículos [FLT] y [BKTP] para obtener más información.

## Bibliografia

- [A] H. Auerbach, *Sur un problème de M. Ulam concernant l'équilibre des corps flottants*, *Studia Math* **7** (1938), 121- 42
- [BKTP] G. Bor, M. Levi, R. Perline, S. Tabachnikov, *Tire Tracks and Integrable Curve Evolution*, *International Mathematics Research Notices*, 2018, 1-71
- [FLT] R. Foote, M. Levi, S. Tabachnikov, *Tractrices, Bicycle Tire Tracks, Hatchet Planimeters, and a 100-year-old*, *The American Mathematical Monthly*, **120**, No. 3 (2013), 199 - 216
- [LT] M. Levi, S. Tabachnikov, *On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin's conjecture, and oscillation of unicycle tracks*, *Experimental Mathematics* **18** (2009) 173–186
- [K VW] J. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon, *Which way did the bicycle go? ... and other intriguing mathematical mysteries*, No. 18. Cambridge University Press, 1996
- [M] L. Menzin, *The tractigraph, an improved form of hatchet planimeter*, *Engineering News* **56** (1906) 131–132.
- [S] *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*. Edited by R. D. Mauldin. Boston, Mass.: Birkhäuser, 1981.
- [We] F. Wegner, *Floating bodies of equilibrium in 2D, the tire track problem and electrons in a parabolic magnetic field*. Preprint 2007, arXiv:physics/0701241.
- [Zi] K. Zindler, *Über konvexe Gebilde II*, *Monatsh. Math. Phys.* **31** (1921): 25–57.