Tarea núm. 11

(para el miercoles 18 nov, 2026)

1. Sea $U \subset D = \{|z| < 1\}$ un abierto simplemente conexo, $0 \in U$, $U \neq D$. Demuestra: existe una función holomorfa inyectiva $h : U \to D$ tal que $h(0) = 0$ y $|h'(0)| > 1$.

   Sug. Sea $a \in D \setminus U$. Existe $\phi \in \mathrm{Aut}(D)$ tal que $\phi(a) = 0$. Sea $V := \phi(U)$. Existe $\rho : V \to D$ holomorfa injectiva tal que $\rho(z)^2 = z$ para todo $z \in V$. Luego existe $\psi \in \mathrm{Aut}(D)$ tal que $\psi(\rho(\phi(0))) = 0$. Define $h : U \to D$ por $h(z) := \psi(\rho(\phi(z)))$. Sea $q : D \to D$, $q(z) := z^2$ y $\mu := \phi^{-1} \circ q \circ \psi^{-1} : D \to D$. Entonces $\mu(0) = 0$ y μ no es inyectiva, así que, por el Lema de Schwarz, $|\mu'(0)| < 1$. Luego $\mu(h(z)) = z$ para todo $z \in U$. Así que $\mu'(0)h'(0) = 1$.

   Nota. Este ejercicio da el último paso en nuestra demostración del Teorema de Mapeo de Riemann. Dado un dominio simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \mathbb{C}$, $p \in U$, hemos demostrado la existencia de una función $f : U \to D$ que es (1) holomorfa, (2) inyectiva, (3) $f(p) = 0$, (4) $f'(p) > 0$, y tal que $f'(p)$ es maximal entre todas las funciones $U \to D$ con estas 4 propiedades. Si tal f no es suprayectiva el ejercicio muestra que $h \circ f$ satisface las mismas 4 propiedades y que $(h \circ f)'(p) > f'(p)$.

2. Demostrar el Principio del Argumento: Si $f(z)$ es meromorfa (holomorfa con polos) en la vecindad y el interior de una curva cerrada simple γ positivamente orientada, sin polos o ceros sobre γ misma, entonces el índice de $f \circ \gamma$ alrededor del 0 es la diferencia $N - P$ entre el número de ceros y polos de f dentro de γ (ambos contados con multiplicidad). Esto es,
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

   Sug. Demuestra 1ero el caso de γ un circulo de radio $\varepsilon > 0$ alrededor del origen y $f(z) = z^k h(z)$, $k \in \mathbb{Z}$, donde h es holomorfa y sin ceros en $|z| < r$, con $r > \epsilon$.

3. Usar el Principio del argumento para demostrar el Teorema de Rouché (pronunciado *Rushé*): Si γ es cerrada y simple y f, g son holomorfas en una vecindad y dentro de γ, sin ceros sobre γ, entonces tienen el mismo número de ceros dentro de γ si $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ a lo largo de γ.

   Sug. La condición significa que el segmento $[f(z), g(z)]$, para $z \in \gamma$, no pasa por el origen. Esto permite deformar $f \circ \gamma$ a $g \circ \gamma$ en $\mathbb{C}^*$.

4. Usar el Teorema de Rouché para demostrar el Teorema Fundamental del Algebra: todo polinomio de grado n tiene n raices (contando multiplicidad).

   Sug. Sea $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, y define $g(z) = a_n z^n$. Luego demuestra que para $|z|$ suficientemente grande, $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$.