Tarea núm. 10

(para el lunes 9 nov, 2026)

1. Encuentra un abierto maximal $U \subset \mathbb{C}$ tal que existe una función holomorfa $w = f(z)$ en U que satisface $w^2 = z(z-1)(z-2)$ para todo $z \in U$.

   Sugerencias.

   a) Tal U no puede contener a $0, 1, 2$, porque los ceros de $f(z)^2$ tienen orden par, mientras que los ceros de $p(z) := z(z-1)(z-2)$ son simples.

   b) Sea $q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^2$. Entonces tal f existe, para una U conexa dada, ssi $p_*(\pi_1(U)) \subset q_*(\pi_1(\mathbb{C}^*))$.

   c) Esta condición se cumple ssi para cada curva cerrada γ en U, el índice de $p \circ \gamma$ alrededor de 0 es par.

   d) $\dfrac{p'(z)}{p(z)} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$, por lo que el índice de $p \circ \gamma$ alrededor de 0 es la suma de los índices de γ alrededor de 0,1 y 2.

   e) Para toda γ cerrada en $U = \mathbb{C} \setminus ([0,1] \cup [2,\infty))$ la suma de estos tres índices es par.

   f) Este U es maximal, porque si $U \subset U_1$ y U_1 contiene un punto en $(0,1)$, entonces U_1 contiene una γ con índices $1, 0, 0$ alrededor del 0,1,2 (resp.). Un argumento similar excluye puntos de U_1 en $(2,\infty)$.

2. La misma pregunta para la ecuación $w + \dfrac{1}{w} = 2z$.

   Sugerencia. La ecuación $w + \dfrac{1}{w} = 2z$ es equivalente a $u^2 = z^2 - 1$, donde $u = w - z$. Esta ecuación se ha visto en clase: una solución holomorfa $u(z)$ es un levantamiento de $z \mapsto z^2 - 1$ al recubrimiento $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $u \mapsto u^2$, así que se puede tomar $U = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

3. Demuestra el teorema de Arzelà-Ascoli: toda sucesión equicontinua y uniformemente acotada de funciones continuas en un compacto en $\mathbb{R}^2$ admite una subsucesión uniformemente convergente.