Tarea núm. 9

(para el 24 marzo, 2025)

Definición. Sea A un conjunto. Una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a una función $f : A \to \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una $N > 0$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $n > N$ y $x \in A$. Una serie de funciones $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a f si la sucesión de sumas parciales $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformemente a f.

1. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y cada $f_n : A \to \mathbb{R}$ es contínua entonces $f_n \to f$ uniformemente implica que f es contínua.
2. Dar un contraejemplo que muestra que el inciso anterior no es cierto si solo pedimos que $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in A$ (convergencia "puntual").
3. Dar un contraejemplo que muestra que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, $f_n : A \to \mathbb{R}$ son diferenciables y convergen uniformemente a una función $f : A \to \mathbb{R}$ entonces f no es necesariamente diferenciable.
4. Si $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ son continuas y convergen uniformemente a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ entonces
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$
5. Si $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto, $f_n : U \to \mathbb{C}$ son holomorfas y convergen uniformemente a $f : U \to \mathbb{C}$ entonces f es holomorfa y $f_n' \to f'$.

   Sug. Demuestra que una función continua en un disco es holomorfa ssi $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ para toda curva cerrada γ en el disco (el Teorema de Morera).
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge uniformemente a $1/(1-z)$ en todo subconjunto compacto de $D = \{|z| < 1\}$.
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.