Tarea núm. 6

(para el 24 feb, 2025)

1. Escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

   Resp. $v_\theta = r u_r,\ u_\theta = -r v_r$.

2. $\alpha := dz/z \in \Omega^1(\mathbb{C}^*)$ es cerrada pero no exacta. Más preciso, la parte real de α es exacta, pero la parte imaginaria no lo es.

   Sug. $dz/z = dr/r + i d\theta$.

3. Demuestra que $f(z) = |z|$ no tiene derivada compleja en ningún punto de $\mathbb{C}$.

4. Dar un ejemplo de una función compleja en $U := \{z \mid |z| < 2\}$ tal que $\{z \in U \mid f \text{ tiene derivada compleja en } z\} = S^1$.

5. *a*) Demuestra que la parte real e imaginaria de una función holomorfa que es C^2 son *armónicas* (esto es, soluciones de $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$.)

   b) Escribir el Laplaciano Δ en coordenadas polares.

   c) $\log(r)$ es una función armónica en $\mathbb{C}^*$.

   d)* Toda función armónica es *localmente* la parte real de una función holomorfa.