Tarea núm. 3

(para el 3 feb, 2025)

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función. Demuestra que las dos condiciones siguientes son equivalentes:

   a) f es holomorfa en $z_0 \in U$; es decir, existe un número complejo, denotado por $f'(z_0)$, tal que
   $$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$
   y tal que el límite es independiente de la manera en que $h \to 0$. Más preciso: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |h| < \delta$ y $z_0 + h \in U$ se cumple
   $$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < \epsilon.$$

   b) f es diferenciable en z_0 y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y, u_y = -v_x$, donde $f = u + iv$.

2. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $z_0 \in U$. Entonces

   a) $df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la transformación lineal $w \mapsto f'(z_0)w$.

   b) $df(z_0)$ es invertible ssi $f'(z_0) \neq 0$.

   c) Si $f'(z_0) \neq 0$ entonces la inversa local de f (lo cual existe segun el TFI y el inciso anterior), es holomorfa tambien.

   d) f es contínua.

3. Demuestra que el producto, suma, cociente (en donde el denominador no se anula) y composición de dos funciones holomorfas son holomorfas. Formula y demuestra las fórmulas para las derivadas de estas funciones.

   Ejemplo. Si $f, g : U \to \mathbb{C}$ son holomorfas entonces $fg : U \to C$ tambien lo es y $(fg)' = f'g + gf'$.

   Demostración. Sea $z_0 \in U$. Tenemos que
   $$\begin{aligned}\frac{f(z_0 + h)g(z_0 + h) - f(z_0)g(z_0)}{h} =& f(z_0 + h)\frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} \\ &+ g(z_0)\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.\end{aligned}$$
   Luego, cuando $h \to 0$ el 1er sumando converge a $f(z_0)g'(z_0)$ y el 2ndo a $g(z_0)f'(z_0)$. $\square$

4. Problemas 1-6 de notas 2.