

Tarea núm. 11

(para el 7 mayo, 2025)

1. Se define una acción del grupo $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $\lambda \cdot v := \lambda v$. La órbita de un $v \neq 0$ se denota por $[v] := \mathbb{C}^* v$. El conjunto de las órbitas se denota por $\mathbb{CP}^1$.

- (a) $[(z_1, z_2)] \mapsto z = z_1/z_2$ define una biyección $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
 (b) Cada $T \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ (una transformación lineal invertible $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$) induce una función biyectiva bien definida $f_T : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, $f_T([v]) = [Tv]$, llamada *la transformación de Möbius* asociada con T .
 (c) Bajo la identificación $\mathbb{CP}^1 = \widehat{\mathbb{C}}$ del inciso (a), si $T \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ está dada por la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la transformación de Möbius asociada $f_T \in \text{Mob}(\mathbb{CP}^1)$ está dada por

$$f_T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- (d) $f_{T_1 \circ T_2} = f_{T_1} \circ f_{T_2}$. O sea, $T \mapsto f_T$ es un homomorfismo entre el grupo $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ y el grupo de las biyecciones $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$.
 (e) El kernel del homomorfismo $T \mapsto f_T$ es el subgrupo de los múltiplos (no nulos) de la identidad. Esto es, $f_{T_1} = f_{T_2}$ ssi $T_2 = \lambda T_1$ para algun $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Para cada $T \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ existe $T_1 \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ (matrices con $\det=1$), única salvo signo, tal que $f_T = f_{T_1}$.
 (f) Las transformaciones de Möbius (la imagen de $T \mapsto f_T$) es un subgrupo del grupo de las biyecciones de $\mathbb{CP}^1$, denotado por $\text{Mob}(\mathbb{CP}^1)$. Es isomorfo al grupo cociente de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ por el subgrupo de los múltiplos (no nulos) de la identidad, denotado por $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$, y también al cociente del grupo $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ por el subgrupo $\{I, -I\}$, denotado por $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Esto es, tenemos una identificación natural, $\text{Mob}(\mathbb{CP}^1) = \text{PGL}_2(\mathbb{C}) = \text{PSL}_2(\mathbb{C})$.
 (g) Bajo la identificación $\mathbb{CP}^1 = \widehat{\mathbb{C}}$ del inciso (a), $f_T \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ (biholomorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$). Esto es, $\text{Mob}(\mathbb{CP}^1) \subset \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.
 (h) Todo automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ está dado por algun $f_T \in \text{Mob}(\mathbb{CP}^1)$. Esto es, $\text{Mob}(\mathbb{CP}^1) = \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.
 (i) Toda transformación de Möbius es una de las transformaciones $z \mapsto \lambda z$, $z \mapsto z + z_0$, $z \mapsto 1/z$, donde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, o una composición de ellas.
 (j)* Toda $f \in \text{Mob}(\mathbb{CP}^1)$ manda rectas y círculos a rectas y círculos.
Sug. Usa el inciso anterior.
 (k)* Sean C, D dos círculos o rectas en $\mathbb{C}$. Existe una $f \in \text{Mob}(\mathbb{CP}^1)$ tal que $f(C) = D$.

2. Dados $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos, se define su *razón cruzada* por

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

- (a) Si $z_i = [v_i]$, $i = 1, \dots, 4$, entonces

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{[v_1, v_3][v_2, v_4]}{[v_1, v_4][v_2, v_3]},$$

donde $[v, v']$ es la determinante de la matriz cuyas columnas (o filas) son v, v' .

- (b) Toda transformación de Möbius f_T preserva la razón cruzada. Esto es, si $f \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ y $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ entonces $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.
Sug. $[Tv, Tv'] = \det(T)[v, v']$.
- (c) Dados 3 puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ existe una única $f \in \text{Mob}(\mathbb{CP}^1)$ tal que $f(z_1) = 0, f(z_2) = 1, f(z_3) = \infty$.
Sug. $[z, z_1, z_2, z_3] = [f[z], 0, 1, \infty]$.
- (d) Encontrar la transformación de Möbius que envía (a) $i, -1, 1$ en $-1, -i, 1$; (b) $-1, -i, 1$ en $-1, 0, 1$; (c) $1, -1, i$ en $1, i, -1$.
- (e) Si $T \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ entonces $f_T(H) = H$, donde $H = \{\text{Im}(z) > 0\}$. Conversamente, si $f \in \text{Mob}(\mathbb{CP}^1)$ tal que $f(H) = H$ entonces existe $T \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ tal que $f = f_T$.
- (f)* La razón cruzada de 4 puntos es real ssi los puntos son cocíclicos o colineales (sobre un círculo o una línea).