

Práctica para el examen parcial núm 2 - soluciones

Fecha del examen: miercoles 9 abr, 2025

Cierto o Falso

1. Toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ es racional (cociente de dos polinomios).

▷ Falso. Por ejemplo, $f(z) = e^z$.

2. Toda función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ es racional (cociente de dos polinomios).

Nota: $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una función $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es meromorfa si $f|_{\mathbb{C}}$ es meromorfa y $f(1/w)$ tiene un polo o singularidad removible en $w = 0$.

▷ Cierto. 1ero, f tiene un número finito de polos: de otro modo, como $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto, habrá un punto de acumulación de polos. Sea $q(z)$ un polinomio con zeros en estos polos (contados con multiplicidad). Así que $p(z) := q(z)f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ con polo en ∞ . Como $p(1/w)$ tiene un polo en $w = 0$ (o singularidad removible), existe $m \geq 0$ tal que $w^m p(1/w)$ es holomorfo en todo $\mathbb{C}$. En particular, es acotado en $|w| \leq 1$, ie existe $C > 0$ tal que $|w^m p(1/w)| \leq C$ si $|w| \leq 1$, por lo que $|p(z)| \leq C|z|^m$ si $|z| \geq 1$. Esto implica que p es un polinomio de grado $\leq m$ (usando la desigualdad de Cauchy, como en la demostración del Teorema de Liouville e inciso 6 abajo). Así que $f(z) = p(z)/q(z)$ es racional.

3. Toda función holomorfa acotada en un abierto en $\mathbb{C}$ es constante.

▷ Falso. $f(z) = z$ es acotada en $|z| < 1$.

4. Toda función holomorfa acotada en un abierto conexo $\mathbb{C}$ no acotado $U \subset \mathbb{C}$ es constante.

▷ Falso. $f(z) = 1/z$ es acotada en $|z| > 1$.

5. Toda función holomorfa entera acotada es constante.

▷ Cierto (el Teorema de Liouville). Si $|f(z)| \leq M$ para todo z , usando la desigualdad de Cauchy tenemos que $|f'(z)| \leq M/R$ para todo $R > |z|$, por lo que $f'(z) = 0$.

6. Si f es entera y existe un $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq |z|^2$ para $|z| > M$, entonces f es un polinomio de grado ≤ 2 .

▷ Cierto. Por la desigualdad de Cauchy, $|f^{(3)}(z)| \leq 1/R$ para todo $R \geq \max(M, |z|)$, así que $f^{(3)} = 0$.

7. Si f es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada orientada γ en U .

▷ Falso. Para $U = \mathbb{C}^*$, $\int_{\gamma} dz/z = 2\pi i$, donde γ es el círculo $|z| = 1$, orientado positivamente.

8. Si f es holomorfa en un abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada orientada γ en U .

▷ Cierto. Como γ es nulo-homotópica, $\gamma = \partial\sigma$ para alguna 2-cadena σ en U , y como f es holomorfa $\alpha = f(z)dz$ es cerrada, $d\alpha = 0$, así que por el Teorema de Stokes, $\int_{\partial\sigma} \alpha = \int_{\sigma} d\alpha = 0$.

9. La suma de los residuos de una función meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ es 0.

Nota: los residuos de una función meromorfa f son los de la 1-forma $\alpha := f(z)dz$. Así que el residuo de f en $z = \infty$ es, por definición, el residuo en $z = 0$ de $\Phi^*\alpha$, donde $\Phi(z) = 1/z$. Esto es, el residuo en $z = 0$ de la 1-forma

$$-f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z^2}.$$

▷ Cierto. El número de polos es finito (ver inciso 2). Rodeamos a cada uno de los polos z_i con un círculo C_i , la frontera de un disco D_i (incluso el polo en $z = \infty$, si lo es), orientado positivamente. Sea σ el complemento de la unión de estos discos, considerado como 2-cadena, así que $\partial\sigma = \sum C_i$. Por el Teorema de Stokes, $0 = \int_{\sigma} d\alpha = \int_{\partial\sigma} \alpha = \sum \int_{C_i} \alpha = 2\pi i \sum \text{Res}(\alpha, z_i)$.

10. La serie $e^z := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

▷ Cierto. Tenemos que $n! \geq (n/2)^{n/2}$ así que $(n!)^{1/n} \geq \sqrt{n/2} \rightarrow \infty$, por lo que el radio de convergencia de la serie es ∞ .

11. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge uniformemente en $\mathbb{C}$.

▷ Falso. Sea $R_n(z) = \sum_{k \geq n} \frac{z^k}{k!}$. Luego $R_n(n!) \geq (n!)^n/n! = (n!)^{n-1} \geq 1$. Así que R_n no converge a 0 uniformemente.

12. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

- ▷ Ciertamente. Toda serie de potencias $\sum a_n z^n$ con radio de convergencia $R \in (0, \infty]$, converge uniformemente en cualquier disco cerrado $|z| \leq r$, para $r < R$. Todo conjunto compacto es acotado.
13. La serie $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.
- ▷ Falso. Usando l'Hopital, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n^2)^{1/n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2)^{1/n} = 1$, así que el radio de convergencia es 1 y la serie diverge para $|z| > 1$.
14. La función $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^{1/z}$, tiene una singularidad esencial en $z = 0$.
- ▷ Ciertamente. $f(1/n) = e^n \rightarrow \infty$ por lo que $f(z)$ no es acotada cerca de 0. Luego $|f(i/n)| = |e^{-in}| = 1$, por lo que $f(z)$ no converge a ∞ cuando $z \rightarrow 0$.
15. Si f_n son continuas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y convergen uniformemente en cualquier subconjunto compacto de U a una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ entonces f es continua.
- ▷ Ciertamente. Sea $z_0 \in U$ y $\epsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $\overline{D}_\delta(z_0) \subset U$. Entonces la convergencia uniforme $f_n \rightarrow f$ en $\overline{D}_\delta(z_0)$ implica que existe $N > 0$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/3$ para todo $n \geq N$ y $z \in \overline{D}_\delta(z_0)$. Para tal n , continuidad de f_n en z_0 implica que existe $\delta' \leq \delta$ tal que $|f_n(z) - f_n(z_0)| \leq \epsilon/3$ para todo $z \in \overline{D}_{\delta'}(z_0)$. Entonces para todo $z \in \overline{D}_{\delta'}(z_0)$ tenemos $|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$.
16. Si f es continua en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y $\int_\gamma f(z) dz = 0$ para cualquier curva cerrada γ en U , suave por pedazos, entonces f es holomorfa.
- ▷ Ciertamente (Teorema de Morera). Se fija $z_0 \in U$ y se define, para cada z en la componente conexa de z_0 , $F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$, a lo largo de cualquier curva que inicia en z_0 y termina en z (la definición es independiente de la curva escogida). Luego se checa que $F' = f$, por lo que f es holomorfa.
17. Si f_n son holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y convergen uniformemente en cualquier subconjunto compacto de U a una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ entonces f es holomorfa.
- ▷ Ciertamente. Es una consecuencia de los dos incisos anteriores. Sea $z_0 \in U$ y $\delta > 0$ tal que $\overline{D}_\delta(z_0) \subset U$. Como $D_\delta(z_0)$ es simplemente conexo, $\int_\gamma f_n(z) dz = 0$ para todo curva cerrada γ en $D_\delta(z_0)$. Como $\overline{D}_\delta(z_0)$ es compacto, $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $\overline{D}_\delta(z_0)$, por lo que $\int_\gamma f(z) dz = \lim_n \int_\gamma f_n(z) dz = 0$. Por el Teorema de Morera, f es holomorfa.
18. Sean f, g holomorfas en $D := \{z \mid |z| < 1\}$ tal que $f(a_n) = g(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\{a_n\} \subset D$, $a_n \neq 0$, y $a_n \rightarrow 0$. Entonces $f = g$.

▷ Ciertamente (el Teorema de unicidad). Sea $h = f - g$. Entonces $h(a_n) = 0$. Sea $\sum_{n \geq m} b_n z^n$ la serie de Taylor de h en 0, con $b_m \neq 0$, $m \geq 0$. Entonces $h(z) = z^m g(z)$, con g holomorfa y $g(0) \neq 0$. Luego $h(a_n) = (a_n)^m g(a_n) = 0$, por lo que $g(a_n) = 0$ y $g(0) = \lim g(z_n) = 0$. Contradicción.

19. Sean f, g holomorfas en D tal que $f(a_n) = g(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\{a_n\} \subset D$ y $a_n \rightarrow 1$. Entonces $f = g$.

▷ Falso. Sea $f = \sin(\pi/(z-1))$, $a_n = 1 - 1/n$. Luego f es holomorfa en todo $z \neq 1$, $f(a_n) = 0$ pero $f \neq 0$.

20. Existe un biholomorfismo $H \rightarrow D$, donde $H = \{\operatorname{Im}(z) > 0\}$, $D = \{|z| < 1\}$.

▷ Ciertamente. $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

21. Una función holomorfa acotada en $D \setminus \{0\}$ se extiende a una función holomorfa en D .

▷ Ciertamente (el Teorema de Riemann de singularidades removibles). Se escoge un $r < 1$ y se define para $|z| < r$

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

donde C es el círculo $|z| = r$ orientado positivamente. Esta función es holomorfa en $|z| < r$ así que basta demostrar que $f_1(z) = f(z)$ para $z \neq 0$. Se define una región, que es el complemento en el disco $|z| \leq r$ de dos discos de radio $\epsilon > 0$, alrededor de 0 y z , con fronteras γ_0, γ (resp.). La función $h(w) := f(w)/(w-z)$ es holomorfa en esta región, así que la integral de $h(w)dw$ en la frontera de esta región se anula. La frontera consiste en 3 círculos, C, γ_0, γ , con los últimos dos con orientación negativa. Así que

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

La última integral da $f(z)$, por la fórmula integral de Cauchy. En la penúltima integral usamos que $|f(w)| \leq M$ para alguna $M > 0$ y que $|w-z| \geq d$ para alguna $d > 0$ (la mínima distancia entre z y γ_0). Así que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0} \frac{M}{d} |dw| = \frac{M}{d} \epsilon.$$

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos $f_1(z) = f(z)$.

22. Si alguna derivada de una función entera es acotada entonces la función es un polinomio.

▷ Ciertamente. La derivada es entera también, así que si es acotada es constante (Liouville), por lo que f es un polinomio.

23. Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa entonces existen constantes complejas $\{a_n\}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ donde la convergencia de la serie es uniforme en } |z| \leq r < 1.$$

▷ Ciertamente (Theorema de Taylor). Consideramos la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

donde $|z| \leq r < \rho < 1$. Luego,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{w} \sum_n \left(\frac{z}{w}\right)^n,$$

donde la convergencia es uniforme en $|w| = \rho$, ya que la serie es dominada por la serie convergente $\sum (r/\rho)^n$. Así que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_n z^n \int_{|w|=\rho} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

usando la fórmula integral de Cauchy,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw.$$

Sea M una cota para f en $|z| \leq \rho$. Por la desigualdad de Cauchy, $|f^{(n)}(0)| \leq n!M/\rho^n$, así que $|f^{(n)}(0)z^n/n!| \leq M(r/\rho)^n$ para $|z| \leq r$. Como $r/\rho < 1$, la serie $\sum (r/\rho)^n$ converge, por lo que $\sum f^{(n)}(0)z^n/n!$ converge uniformemente en $|z| \leq r$.

24. Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa entonces se extiende a una función continua $\overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$.

▷ Falso. $f(z) = 1/(1-z)$ no se extiende a $z = 1$ ya que $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty$.

25. Si f, g son dos funciones meromorfas no nulas en $\widehat{\mathbb{C}}$ con los mismos ceros y polos (contados con multiplicidad), entonces f/g es una constante.

▷ Ciertamente. $h = f/g$ no tiene ceros ni polos en $\widehat{\mathbb{C}}$, por lo que $h|_{\mathbb{C}}$ es acotado. Por Liouville, es constante.

26. Si f, g son dos funciones meromorfas no nulas en $\mathbb{C}$ con los mismos ceros y polos (contados con multiplicidad), entonces f/g es una constante.

▷ Falso. $f = e^z$ y $g = 1$ no tienen ceros ni polos en $\mathbb{C}$.

27. Si f, g son dos polinomios no nulos con los mismos ceros (contados con multiplicidad), entonces f/g es una constante.

▷ Ciertamente. Casi especial del inciso 25.

28. Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa entonces tiene una primitiva (una función holomorfa en D cuya derivada es f).

▷ Ciertamente. Se define $F(z) = \int_0^z f(w)dw$, donde la integral es a lo largo de cualquier curva que conecta 0 con z . Como D es simplemente conexa, cualquier dos tales curvas son homotópicas, por lo que la integral está bien definida. Luego es fácil checar que $F' = f$.

29. Toda función holomorfa en un abierto en $\mathbb{C}$ tiene una primitiva.
- ▷ Falso. La función $f(z) = 1/z$ no tiene primitiva en $\mathbb{C}^*$. De otro modo, si $f = F'$, para todo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} F'(z)dz = \int_{\gamma} dF = F(1) - F(0)$. Así que para γ cerrada la integral se anula. Pero para $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ la integral da $2\pi i$.
30. Una función holomorfa inyectiva preserva ángulos, pero no necesariamente distancias.
- Nota: una función suave f “preserva ángulos” significa que si $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ son dos curvas suaves en el dominio de f , definidas para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ para algun $\epsilon > 0$, con $z = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, tal que $v_i := \gamma'_i(0) \neq 0$, $i = 1, 2$, entonces el ángulo entre v_1 y v_2 es igual al ángulo entre $df(z)v_1$ y $df(z)v_2$.
- ▷ Cierto. $df(z)v_i = f'(z)v_i$. Luego, por ser f inyectiva, $f'(z) \neq 0$. Multiplicación por un número complejo es la composición de rotation y dilatación, y ambas operaciones preservan ángulos.
31. Si f es meromorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y tiene un polo en $z_0 \in U$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$ para algun $m \in \mathbb{N}$.
- ▷ Cierto. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ implica $\lim_{z \rightarrow z_0} 1/f(z) = 0$, así que $1/f(z)$ tiene singularidad removible en $z = z_0$. Por el Teorema de Taylor, cerca de z_0 , $1/f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ para algun $n \in \mathbb{N}$ y h holomorfa con $h(z_0) \neq 0$. Así que $(z - z_0)^{n+1} f(z) = (z - z_0)/h(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow z_0$.
32. La parte real de una función holomorfa en un abierto en $\mathbb{C}$ es armónica.
- ▷ Cierto. Si $f = u + iv$ es holomorfa entonces satisface las ecuaciones de CR son $u_x = v_y, u_y = -v_x$, por lo que $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$.
33. Toda función armónica en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es la parte real de una función holomorfa en U .
- ▷ Falso. $u = \log r$ es armónica en $\mathbb{C}^*$ pero no es la parte real de una función holomorfa. Demostración: si $u + iv$ es una tal función, las ecuaciones de CR en coordenadas polares son $u_{\theta} = -rv_r, v_{\theta} = ru_r$, así que $v_r = 0, v_{\theta} = 1$ por lo que $dv = v_r dr + v_{\theta} d\theta = d\theta$. Sea C el círculo $|z| = \text{const.}$, orientado positivamente. Entonces $\int_C dv = \int_C d\theta = 2\pi$. Pero la integral de una 1-forma exacta en curva cerrada se anula. Contradicción.
34. Toda función armónica en D es la parte real de una función holomorfa en D .
- ▷ Cierto. Si $f = u + iv$, ent las ecns de CR son $dv = \alpha$, donde $\alpha = -u_y dx + u_x dy$. Como u es armónica, α es una 1-forma cerrada, $d\alpha = (u_{xx} + u_{yy})dx \wedge dy = 0$. En D , siendo simplemente conexa, toda forma cerrada es exacta. Así que $dv = \alpha$ tiene solución.
35. Si f es holomorfa en D y $f' = 0$ entonces f es constante.

▷ Ciertamente. Para toda $z \in D$, $f(z) - f(0) = \int_0^z df = 0$, donde la integral es a lo largo de cualquier curva que conecta 0 con z . (Nota que solo usamos que $df = 0$ y que D es arco conexo.)

36. Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son suficientes para que f sea holomorfa.

▷ Ciertamente. Sea $z_0 \in U$. Por las ecuaciones de CR, $df(z_0)$ es lineal compleja, ie dada por multiplicación por un número complejo $c \in \mathbb{C}$, $df(z_0)h = ch$. Luego,

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - c \right| = \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - ch}{h} \right| = \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - df(z_0)h|}{|h|}.$$

Por definición de diferenciabilidad, la última expresión $\rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Así que f es holomorfa en z_0 con $f'(z_0) = c$.

37. Una función meromorfa en $\mathbb{C}$ solo puede tener un número finito de polos.

▷ Falso. Por ejemplo, $f(z) = 1/\sin(\pi z)$ es meromorfa, con polos en $\mathbb{Z}$.