Práctica para el examen parcial núm 2

Fecha del examen: miercoles 9 abr, 2025

Cierto o Falso

1. Toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ es racional (cociente de dos polinomios).
2. Toda función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ es racional (cociente de dos polinomios).

   Nota: $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una función $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es meromorfa si $f|_{\mathbb{C}}$ es meromorfa y $f(1/z)$ tiene un polo en $z = 0$.
3. Toda función holomorfa acotada en un abierto en $\mathbb{C}$ es constante.
4. Toda función holomorfa acotada en un abierto conexo $\mathbb{C}$ no acotado $U \subset \mathbb{C}$ es constante.
5. Toda función holomorfa entera acotada es constante.
6. Si f es entera y existe un $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq |z|^2$ para $|z| > M$, entonces f es un polinomio de grado ≤ 2.
7. Si f es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada orientada γ en U.
8. Si f es holomorfa en un abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada orientada γ en U.
9. La suma de los residuos de una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ es 0.

   Nota: los residuos de una función meromorfa f son los de la 1-forma $\alpha := f(z)dz$. Así que el residuo de f en $z = \infty$ es, por definición, el residuo en $z = 0$ de $\Phi^*\alpha$, donde $\Phi(z) = 1/z$. Esto es, el residuo en $z = 0$ de la 1-forma
   $$-f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z^2}.$$
10. La serie $e^z := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.
11. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge uniformamente en $\mathbb{C}$.
12. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.
13. La serie $\displaystyle\sum_{n} \frac{z^n}{n^2}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.
14. La función $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{1/z}$, tiene una singularidad esencial en $z = 0$.
15. Si f_n son continuas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y convergen uniformamente en cualqueir subconjunto compacto de U a una función $f : U \to \mathbb{C}$ entonces f es continua.

16. Si f es continua en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada γ en U, suave por pedazos, entonces f es holomorfa.

17. Si f_n son holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y convergen uniformamente en cualqueir subconjunto compacto de U a una función $f : U \to \mathbb{C}$ entonces f es holomorfa.

18. Sean f, g holomorfas en $D := \{z \mid |z| < 1\}$ tal que $f(a_n) = g(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\{a_n\} \subset D$ y $a_n \to 0$. Entonces $f = g$.

19. Sean f, g holomorfas en D tal que $f(a_n) = g(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\{a_n\} \subset D$ y $a_n \to 1$. Entonces $f = g$.

20. Existe un biholomorfismo $H \to D$, donde $H = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$, $D = \{|z| < 1\}$.

21. Una función holomorfa acotada en $D \setminus \{0\}$ se extiende a una funcion holomorfa en D.

22. Si alguna derivada de una función entera es acotada entonces la función es un polinomio.

23. Si $f : D \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces existen constantes complejas $\{a_n\}$ tal que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde la convergencia de la serie es uniforme en $\{|z| \leq r\}$ para todo $0 < r < 1$.

24. Si $f : D \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces se extiende a una función continua $\overline{D} \to \mathbb{C}$.

25. Si f, g son dos funciones meromorfas no nulas en $\widehat{\mathbb{C}}$ con los mismos ceros y polos (contados con multiplicidad), entones f/g es una constante.

26. Si f, g son dos funciones meromorfas no nulas en $\mathbb{C}$ con los mismos ceros y polos (contados con multiplicidad), entones f/g es una constante.

27. Si f, g son dos polinomios no nulos con los mismos ceros (contados con multiplicidad), entones f/g es una constante.

28. Si $f : D \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces tiene una primitiva (una función holomorfa en D cuya derivada es f).

29. Toda función holomorfa en un abierto en $\mathbb{C}$ tiene una primitiva.

30. Una función holomorfa inyectiva preserva ángulos, pero no necesariamente distancias.

    Nota: una función suave f "preserva ángulos" significa que si $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ son dos curvas suaves en el dominio de f, definidas para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ para algun $\epsilon > 0$, con $z = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, tal que $v_i := \gamma_i'(0) \neq 0$, $i = 1, 2$, entocnes el ángulo entre v_1 y v_2 es igual al ángulo entre $df(z)v_1$ y $df(z)v_2$.

31. Si f es meromorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y tiene un polo en $z_0 \in U$, entonces $\displaystyle\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$ para algun $m \in \mathbb{N}$.

32. La parte real de una función holomorfa en un abierto en $\mathbb{C}$ es armónica.

33. Toda función armónica en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es la parte real de una función holomorfa en U.

34. Toda función armónica en D es la parte real de una función holomorfa en D.

35. Si f es holomorfa en D y $f' = 0$ entonces f es constante.

36. Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y una función diferenciable $f : U \to \mathbb{C}$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son suficientes para que f sea holomorfa.

37. Una función meromorfa en $\mathbb{C}$ solo puede tener un número finito de polos.