Examen parcial 1

Lunes 3 mar, 2025

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función.
   a) (5 pts) Define: (i) f es diferenciable; (ii) f es holomorfa.
   b) (25 pts) Demuestra: f es holomorfa ssi es diferenciable y $f_y = if_x$.

2. (30 pts) Calcula la integral de linea $\displaystyle\int_\gamma \alpha$, donde $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ está dada por
   $$\gamma(t) := (5 + 7\cos t, 2 + 3\sin(t)),$$
   y α es (i) xdy; (ii) dz/z, (iii) $\bar{z}d\bar{z}$.

3. (40 pts) Cierto o Falso

   Escoger 4 de los siguientes incisos. Si haces más se evaluan los mejores 4. Cada inciso son 10 puntos. En caso de "cierto" basta dar un argumento breve (no tiene que ser una demostración completa); en caso de "falso" dar un contra-ejemplo.

   a) Toda transformación $\mathbb{R}$-lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es diferenciable.
   b) Una transformación $\mathbb{R}$-lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa ssi es $\mathbb{C}$-lineal.
   c) Toda 1-forma exacta en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es cerrada.
   d) Toda 1-forma cerrada en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es exacta.
   e) Si α es una 1-forma cerrada en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\displaystyle\int_{c_1} \alpha = \int_{c_2} \alpha$ para cualquier dos 1-cadenas c_1, c_2 homólogas en U.
   f) Si α es una 1-forma cerrada en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\displaystyle\int_{c_1} \alpha = \int_{c_2} \alpha$ para cualquier dos 1-cadenas c_1, c_2 cerradas en U.
   g) Toda función holomorfa f en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ tiene una primitiva (una función holomorfa en U cuya derivada es f).
   h) Toda función holomorfa en $D = \{z \mid |z| < 1\}$ tiene una primitiva.
   i) Toda función armónica en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es la parte real de una función holomorfa en U.