Práctica para el examen parcial 1

(En construcción)

Fecha del examen: Lunes 3 mar, 2025

Definiciones:

- Una función diferenciable, su derivada en un punto, su derivada (diferencial).
- Una funcíon holomorfa, su derivada, las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
- Una k-cadena ($k = 0, 1, 2$), su frontera, cerrada/exacta, cadenas homólogas, una cadena homológicamente nula.
- Una k-forma diferencial ($k = 0, 1, 2$), su derivada exterior, cerrada/exacta, formas cohomólogas.
- La integral de una k-forma sobre una k-cadena.
- Push-forward/pull-back de una cadena/forma bajo una función diferenciable.
- El índice de un punto respecto a una 1-cadena cerrada, el número de vueltas de una curva cerrada parametrizada alrededor de un punto.

Cierto o Falso?

(En todos los inciso $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto.)

1. Toda 1-cadena cerrada en U es homóloga a la suma de curvas cerradas parametrizadas.
2. Toda 0-cadena en cerrada.
3. Toda 0-cadena es exacta.
4. Toda función holomorfa $U \to \mathbb{C}$ es diferenciable.
5. Toda función $f : U \to \mathbb{C}$ cuyas derivadas parciales f_x, f_y existen es diferenciable.
6. Si $f : U \to \mathbb{C}$ es diferenciable entonces las derivadas parciales f_x, f_y existen.
7. Toda transformación $\mathbb{R}$-lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es diferenciable.
8. Toda transformación $\mathbb{R}$-lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa.
9. Una transformación $\mathbb{R}$-lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa ssi es $\mathbb{C}$-lineal.
10. Toda función $f : U \to \mathbb{C}$ cuyas derivadas parciales f_x, f_y existen y satisfacen $f_x + if_y = 0$ es holomorfa.
11. Toda función $f : U \to \mathbb{C}$ diferenciable cuyas derivadas parciales f_x, f_y esatisfacen $f_x+if_y = 0$ es holomorfa.
12. Toda función diferenciable $U \to \mathbb{C}$ es holomorfa.
13. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann para una función diferenciable $f : U \to \mathbb{C}$ son necesarias y suficientes para que f sea holomorfa.
14. Toda 1-forma cerrada en $U \subset \mathbb{C}$ es exacta.
15. Toda 1-forma cerrada en $\mathbb{C}$ es exacta.

16. Una curva cerrada en U que es homológicamente nula es homotópicamente nula.
17. Una curva cerrada en U que es homotópicamente nula es homológicamente nula.
18. Toda 1-forma exacta en $U \subset \mathbb{C}$ es cerrada.
19. La integral de línea de una 1-forma cerrada en U a lo largo de una curva cerrada se anula.
20. La integral de línea de una 1-forma exacta en U a lo largo de una curva cerrada se anula.
21. Si la integral de linea de una 1-forma a lo largo de cualquier curva cerrada en U se anula, entonces la forma es exacta.
22. La integral de línea de una 1-forma a lo largo de una curva parametrizada no constante depende de la parametrización.
23. La integral de línea de una 1-forma a lo largo de una curva parametrizada es invariante bajo reparametrización de la curva que preserva la orientación.
24. Sean r, θ las coordenada polares usuales en $\mathbb{R}^2$. Entonces $d\theta$ es una 1-forma cerrada bien definida en $\mathbb{C}^*$.
25. Sea $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces $\int_\gamma f' dz = 0$ para toda curva cerrada parametrizada γ en $\mathbb{C}^*$.
26. Si f es holomorfa en un abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada orientada γ en U.
27. Si f es holomorfa en un abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\int_c f(z)dz = 0$ para cualquier 1-cadena cerrada en U.
28. Si f es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\int_c f(z)dz = 0$ para cualquier 1-cadena cerrada en U.
29. Si f es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\int_c f(z)dz = 0$ para cualquier 1-cadena exacta en U.
30. Sea $\gamma : [0,1] \to U$ una curva cerrada parametrizada. Si γ es exacta entonces $\operatorname{ind}(\gamma, z_0) = 0$ para toda $z_0 \in U \setminus \gamma([0,1])$.
31. En converso del inciso anterior es cierto.
32. Existe un abierto $U \subset \mathbb{C}$ que es conexo pero no arco-conexo.
33. Existe un cerrado $F \subset \mathbb{C}$ que es conexo pero no arco-conexo.
34. Si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa sin ceros entonces $1/f$ es holomorfa en U.
35. Toda función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$ tiene una primitiva (una función holomorfa en U cuya derivada es f).
36. Toda función holomorfa en $D = \{z \mid |z| < 1\}$ tiene una primitiva.
37. La parte real de una función holomorfa en U es armónica.
38. Toda función armónica $u : U \to \mathbb{R}$ es la parte real de una función holomorfa en U.
39. Si f es holomorfa en U y $f' = 0$ entonces f es constante en cada componente conexa de U.