Notas 2
El teorema de Stokes

16 de febrero de 2025

Resumen. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. Vamos a definir dos tipos de objetos (grupos abelianos)

- $C_k(U) =$ las k-cadenas en U, para $k = 0, 1, 2$.
- $\Omega^k(U) =$ las k-formas (diferenciales) en U, para $k = 0, 1, 2$.

Luego, definimos mapas entre esos objetos, ∂ (frontera) y d (derivada exterior),

$$C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0,$$
$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} 0,$$

y una forma bilineal (integración)

$$\Omega^k \times C_k \to \mathbb{R}, \quad (\omega, c) \mapsto \int_c \omega.$$

Estas operaciones satisfacen $\partial^2 = 0, d^2 = 0$, y el *Teorema de Stokes*:

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Nota. Vamos a definir estos objetos aquí solamente para un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. La extensión para $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, es relativamente fácil y no presenta ideas esencialmente nuevas. También se puede generalizar fácilmente las construcciones para espacios más generales que abiertos en $\mathbb{R}^n$, i.e. para variedades diferenciales.

Una consecuencia (casi) inmediata del Teorema de Stokes es la Fórmula Integral de Cauchy,

$$\int_{\partial c} f(z)dz = 0,$$

donde $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $c \in C_2(U)$.

Cadenas

Definiciones. El *k-cubo*, $k \geq 0$, es $I^k = [0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$. Así que $I^0 = \{0\}$ (un punto), $I^1 = [0, 1]$ (un intervalo), $I^2 = I \times I$ (un cuadrado). Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. Un *k-cubo singular* en U es una función suave $I^k \to U$ (C^1 es suficiente para lo que viene). Así que un 0-cubo singular es un punto $p \in U$, un 1-cubo singular es una curva parametrizada $\gamma : I \to U$, y un 2-cubo singular es una función $\sigma : I^2 \to U$.

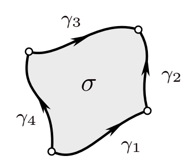
Un k-cubo singular, $k > 0$, es *degenerado* si no depende de una de sus coordenadas. Así que $\gamma : I \to U$ es degenerado si es constante, y $\sigma : I^2 \to U$ es degenerado si $\sigma(t_1, t_2) = \sigma(t_1, 0)$ o $\sigma(t_1, t_2) = \sigma(0, t_2)$ para todo $(t_1, t_2) \in I^2$.

Una *k-cadena* en U es una combinación lineal formal (finita) de k-cubos singulares, $c = \sum_i m_i c_i$, donde $m_i \in \mathbb{Z}$ y $c_i : I^k \to U$. El conjunto (grupo abeliano) de las k-cadenas en U, módulo k-cubos degenerados, se denota por $C_k(U)$.

Para simplificar la terminología, llamaremos "cadenas" a los elementos de C_k, aunque en relalidad son clases de equivalencia de cadenas mod cubos degenerados.

Dicho de una manera, más formal, $C_k(U)$ es el grupo cociente del grupo abeliano libre generado por los k-cubos singulares, módulo el subgrupo generado por los k-cubos degenrados para $k > 0$.

La *frontera* de una k-cadena $c = \sum_i m_i c_i$ es la $(k-1)$-cadena $\partial c = \sum_i m_i \partial c_i$, donde para



- $\underline{k=0}$: $\partial p = 0$,
- $\underline{k=1}$: $\partial \gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$,
- $\underline{k=2}$: $\partial \sigma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, donde

  $\gamma_1(t) = \sigma(t, 0),\ \gamma_2(t) = \sigma(1, t),\ \gamma_3(t) = \sigma(t, 1),\ \gamma_4(t) = \sigma(0, t),\ \forall t \in I.$

Una k-cadena c es *cerrada* si $\partial c = 0$ y es *exacta* si es la frontera de una $(k+1)$-cadena, $c = \partial b$. Una cadena cerrada se llama también un *ciclo*.

Nota que no hemos definido 3-cadenas así que tampoco 2 cadenas exactas, solo cerradas. Toda 0-cadena es cerrada, por definición.

Problema 1. Sea D_k, $k = 1, 2$, el grupo abeliano generado por las k-cadenas degenardas y $D_0 = \{0\}$. Entonces $c \in D_k$ implica $\partial c \in D_{k-1}$, $k = 1, 2$. Así que $\partial : C_k \to C_{k-1}$ está bien definida, $k = 0, 1, 2$.

Problema 2. (a) $\partial^2 = 0$, ie $\partial(\partial c) = 0$ para toda $c \in C_k$, $k = 1, 2$. (b) Concluye que una 1-cadena exacta es cerrada. (c)* El converso no es cierto.

Nota. Incisos marcados con estrella * son opcionales.

(*Sug.* Para (c): toma $U = \mathbb{C}^*$, $c = \gamma : I \to U$, donde $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$. Demostrar que c no es exacta no es tan facil. Ver abajo el Teorema de Stokes.)

Definición. Sea $Z_k \subset C_k$ las cadenas cerradas y $B_k \subset Z_k$ las exactas, $k = 0, 1$. Dos cadenas $c_1, c_2 \in C_k$ son *homólogas* si $c_1 - c_2 \in B_k$. El grupo (abeliano) de las clases de homología de k-cadena cerradas se denota por $H_k(U) := Z_k / B_k$.

Definición. El *negativo* de un k-cubo singular, $k > 0$, está dado por la "orientación opuesta"; como solo lo usamos para $k = 1, 2$, lo definimos explicitamente en estos casos:

- $\underline{k=1}$: $-\gamma(t) := \gamma(1-t)$, $t \in I$.
- $\underline{k=2}$: $-\sigma(t_1,t_2) := \sigma(t_2,t_1)$, $(t_1,t_2) \in I^2$.

Problema 3. (a) Sea $\gamma : I \to U$ una curva parametrizada, $\phi : I \to I$ una función suave tal que $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$ y $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$ (una "reparametrización" de γ.) Entonces $\gamma, \tilde{\gamma}$ son homólogas.

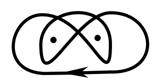
Sug. $\gamma - \tilde{\gamma} = \partial\sigma$, donde $\sigma(t_1,t_2) = \gamma(t_1(1-t_2) + \phi(t_1)t_2)$.

(b) Dos curvas, con la misma frontera, que son *homotópicas* (relativo a su frontera común) son homólogas.

(c) Dos curvas cerradas homotópicas son homólogas.

(d)* El converso no es cierto.

Sug. Toma U= el complemento de dos puntos en $\mathbb{R}^2$. Encuentra una curva cerrada en U que es nulo-homóloga pero no nulo-homotópica. Ver la figura.



(e) $-\gamma$ es homóloga a $(-1)\gamma$, para toda curva $\gamma : I \to U$. Es decir, $\gamma + (-\gamma)$ es exacta.

Problema 4. Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es abierto entonces $H_0(U)$ es isomorfo a

(a) $\mathbb{Z}$, si U es arco-conexo;

Sug. Sea $p \in U$. El isomorfismo está dado por $c = \sum_i m_i p_i \mapsto \left(\sum_i m_i\right) p$.

(b)* el grupo abeliano libre generado por el conjunto de las componentes arco-conexas de U.

Problema 5.* Calcula los grupos de homología $H_k(U)$, $k = 0, 1$, de

(a) $\mathbb{C}$ (b) $\mathbb{C}^*$ (c) $\{|z| < 1\}$ (d) $\{|z| < 1\} \cup \{|z-3| < 1\}$ (e) $\mathbb{C} \setminus F$, donde F es un conjunto finito con n puntos.

Resp. (a) $\mathbb{Z}, 0$ (b) $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z}, 0$ (d) $\mathbb{Z}^2, 0$ (e) $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n$.

Nota. Para definir $H_2(U)$ se tiene que dedinir C_3 y $\partial : C_3 \to C_2$, y entonces $B_2 = \partial(C_3)$ y $H_2(U) = Z_2/B_2$. No lo haremos aquí, pero el resultado final es que para un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, $H_2(U) = 0$ (toda 2-cadena cerrada en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es exacta).

Formas diferenciales

Definición. $\Lambda^k(\mathbb{R}^2)^*$, $k = 0, 1, 2$, se define por:

- $\underline{k=0}$: $\Lambda^0(\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}$,
- $\underline{k=1}$: $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)^* = (\mathbb{R}^2)^*$,
- $\underline{k=2}$: $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)^* =$ formas bilineales antisimétricas en $\mathbb{R}^2$.

Dadas $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)^*$, se define su *producto cuña* $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$ por

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 : (v_1, v_2) \mapsto \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) - \alpha_1(v_2)\alpha_2(v_1).$$

Nota. En unos textos hay un factor de $1/2$ en esta fórmula.

Nota. A veces denotamos a $\Lambda^k(\mathbb{R}^2)^*$ simplemente por Λ^k.

Problema 6. (a) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Lambda^2$. (b) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = -\alpha_2 \wedge \alpha_1$. (c) Todo elemento de Λ^2 es un múltiplo de $x \wedge y$.

Definición. Una *k-forma diferencial* en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es una función suave $U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^2)^*$. El espacio de las k-formas diferenciales en U se denota por $\Omega^k(U)$. El espacio de las k-formas *complejas*, $\Omega^k_{\mathbb{C}}(U)$, consiste en expresiones de la forma $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, donde $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(U)$.

Explicitamente,

- $\Omega^0(U)$ son funciones suaves $U \to \mathbb{R}$,
- $\Omega^1(U)$ son de la forma $f\,dx + g\,dy$, donde $f, g \in \Omega^0(U)$,
- $\Omega^2(U)$ son de la forma $h dx \wedge dy$, donde $h \in \Omega^0(U)$,

En el caso de $\Omega^k_{\mathbb{C}}(U)$, tenemos que $f, g, h \in \Omega^0_{\mathbb{C}}(U)$, ie son funciones suaves $U \to \mathbb{C}$.

Nota. A veces denotamos a $\Omega^k(U)$, e incluso $\Omega^k_{\mathbb{C}}(U)$, simplemente por Ω^k, cuando U es claro del contexto.

Problema 7. Escribe $dx, dy, dx \wedge dy$ en términos de (a) $dz, d\bar{z}$; (b) $dr, d\theta$, donde r, θ son coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.

Ojo. $d\theta$ no está definido en $z = 0$.

Definición. La *derivada exterior* $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, $k = 0, 1, 2$, se define por

(1) Si $f \in \Omega^0(U)$, df es su diferencial (o derivada) usual, como fue definido en Notas 1, $df = f_x\,dx + f_y\,dy$.

(2) Si $\alpha = f dx + g dy \in \Omega^1$ entonces $d\alpha = df \wedge dx + dg \wedge dy$.

(3) $d(\Omega^2) = 0$.

Problema 8. Sea $\alpha \in \Omega^1$, $\alpha = f dx + g dy = u dz + v d\bar{z}$. (a) Expresar u, v en términos de f, g y vice versa. (b) Sea $d\alpha = p dx \wedge dy = q dz \wedge d\bar{z}$. Expresar p en términos de las f_x, f_y, g_x, g_y, y q en términos de $u_z, u_{\bar{z}}, v_z, v_{\bar{z}}$.

Nota. $f_x = \partial_x f, f_y = \partial_y f, f_z = (f_x - i f_y)/2, f_{\bar{z}} = (f_x + i f_y)/2$.

Resp. $d\alpha = (g_x - f_y) dx \wedge dy = (v_z - u_{\bar{z}}) dz \wedge d\bar{z}$.

Definición. $\alpha \in \Omega^k$ es *cerrada* si $d\alpha = 0$, y es *exacta* si $\alpha = d\beta$ para alguna $\beta \in \Omega^{k-1}$. Dos k-formas son *cohomólogas*, $k = 0, 1$, si su diferencia es exacta. El grupo de las clases de cohomología de k-formas cerradas se denota por $H^k(U)$. Así que H^0 son las funciones f con $df = 0$, ie localmente constantes (no hay funciones exactas), H^1 son 1-formas cerradas, mod diferenciales de funciones, y H^2 son 2-formas (todas son cerradas) mod derivadas exterior de 1-formas.

Nota. $H^k(U)$ aquí es la 'cohomología de de-Rahm'. Hay otras: Čech, singular, CW, etc.

Problema 9. Para $U \subset \mathbb{R}^2$ conexa, $H^0(U) \cong \mathbb{R}$.

Teorema. *Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ es una función suave entonces $f_{xy} = f_{yx}$.*

Problema 10. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto.

(a) Dar un ejemplo de una 1-forma no cerrada.

(b) $d^2 = 0$. Concluye que una 1-forma exacta es cerrada.

(c)* Dar un ejemplo de una 1-forma cerrada no exacta.
Sug. Sea $U = \mathbb{C}^*$, $\alpha = (ydx - xdy)/(x^2 + y^2)$.

"Pull-back" y "push-forward"

Sean $U, V \subset \mathbb{R}^2$ dos abiertos y $\Phi : U \to V$ una función suave. Los *"push-forward"* y *"pull-back"* asociados,

$$\Phi_* : C_k(U) \to C_k(V), \quad \Phi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U),$$

están dados por

- $\Phi_*(\sum_i m_i \sigma_i) = \sum_i m_i (\Phi \circ \sigma_i)$,
- $\Phi^* f = f \circ \Phi$, $f \in \Omega^0(V)$,
- $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^*\alpha) \wedge (\Phi^*\beta)$.
- $\Phi^* d\alpha = d(\Phi^*\alpha)$.

Problema 11. Demostrar que $\Phi_*(-\sigma) = -\Phi_*\sigma$, por lo que Φ_* está bien definida.

Problema 12. $\Phi^*(dx \wedge dy) = J_\Phi dx \wedge dy$, donde $J_\Phi = \det(d\Phi)$ (la *Jacobiana* de Φ.)

Problema 13. Sean $U, V \subset \mathbb{R}^2$ abiertos y $\Phi : U \to V$, $\Psi : V \to \mathbb{R}^2$ funciones suaves.

$$\begin{array}{llll} (a) & (\Psi \circ \Phi)_* = \Psi_* \circ \Phi_* & (a^*) & (\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^* \\ (b) & \Phi_* \circ \partial = \partial \circ \Phi_* & (b^*) & \Phi^* \circ d = d \circ \Phi^* \\ (c) & (id_U)_* = id_{C_k} & (c^*) & (id_U)^* = id_{\Omega^k}, \end{array}$$

Problema 14. Sea $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ una función suave, $\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, $z = x + iy, w = u + iv$. Expresar (a) Φ^*du, Φ^*dv en términos de f_x, f_y, dx, dy. (b) $\Phi^*dw, \Phi^*d\bar{w}$ en términos de $f_z, f_{\bar{z}}, dz, d\bar{z}$.

Nota. $f_x = \partial_x f, f_y = \partial_y f, f_z = (1/2)(f_x - if_y), f_{\bar{z}} = (1/2)(f_x + if_y)$.

Integración

Definición. La *integral* de una k-forma ω sobre una k-cadena $c = \sum m_i \sigma_i$ es

$$\int_c \omega := \sum_i m_i \int_{\sigma_i} \omega = \sum_i m_i \int_{I^k} \sigma_i^* \omega.$$

Esto es,

- $k = 0$: $\sigma : \{0\} \to U$, $f \in \Omega^0$. Luego

$$\int_\sigma f := f(\sigma(0)).$$

- $k = 1$: $\gamma : I \to U$, donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\alpha = f dx + g dy \Longrightarrow \gamma^* \alpha = h dt$, donde $h = (f \circ \gamma) x' + (g \circ \gamma) y'$. Luego

$$\int_\gamma \alpha := \int_I \gamma^* \alpha = \int_0^1 h(t) dt.$$

- $k = 2$: $\sigma : I^2 \to U$, $\beta = f dx \wedge dy$, $\sigma^* \beta = (f \circ \sigma) J_\sigma dt_1 \wedge dt_2$, donde $J_\sigma = \det(d\sigma)$. Luego

$$\int_\sigma \beta := \int_{I^2} (f \circ \sigma) J_\sigma.$$

Problema 15. $\int_{-\sigma} \omega = -\int_\sigma \omega$, donde σ es un k-cubo singular, $k = 1, 2$.

Problema 16. Demostrar que para *cualquiera* función suave $\Phi : U \to V$ (no necesariamente inyectiva), $\omega \in \Omega^k(V)$, $c \in C_k(U)$,

$$\int_{\Phi_* c} \omega = \int_c \Phi^* \omega.$$

Tres teoremas del cálculo integral

(1) **El Teorema Fundamental del Cálculo**:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a),$$

para toda función suave $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(2) **Cambio de variable**:

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable. Entonces:

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\sigma(t)) \sigma'(t)\, dt.$$

- Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ suave e inyectiva. Entonces
$$\int_{\Phi(U)} f = \int_U (f \circ \Phi)|J_\Phi|.$$

(3) **Fubini:** Sea $R := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ (un rectángulo), y $f : R \to \mathbb{R}$ una función contínua. Etonces
$$\int_R f = \int_c^d \left[\int_a^b f(t_1,t_2)dt_1 \right] dt_2 = \int_a^b \left[\int_c^d f(t_1,t_2)dt_2 \right] dt_1,$$

Problema 17. Los tres teoremas siguen siendo válidos para funciones f con valores complejos, escribiendo $f = u + iv$ y definiendo $\int f = \int u + i \int v$.

El teorema de Stokes

Theorem. Sea $\omega \in \Omega^k(U)$ y $c \in C_{k+1}(U)$, $k = 0, 1$. Entonces,
$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Demostración: La fórmula es una consecuencia casi inmediata de las definiciones anteriores y los 3 teoremas arriba. Es suficiente demostrarlo para $c = \sigma : I^{k+1} \to U$, usando la linearidad de la integral en C_k. Hacemos el caso $k = 0$ y dejamos el otro de ejercicio. En este caso, $f \in \Omega^0$, $\sigma : [0,1] \to U$, y la afirmación por demostrar es
$$\int_\sigma df = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)).$$

Luego, $\sigma^* df = d\sigma^* f = d(f \circ \sigma) = (f \circ \sigma)' dt$, así que, por el Teorema Fundamental del Cálculo,
$$\int_\sigma df = \int_I \sigma^* df = \int_0^1 (f \circ \sigma)' dt = (f \circ \sigma)(1) - (f \circ \sigma)(0).$$

□

Corolario. *La integral de una k-forma cerrada sobre una k-cadena cerrada depende solamente de la clase de homología de la cadena y la clase de cohomologia de la forma.*

Problema 18. Demostrar el Teorema de Stokes para $k = 1$.

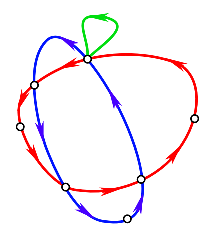
Sug. Tomamos 1ero $c = \sigma : I^2 \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(x,y) = (x,y)$, $\omega = f dx + g dy$. Luego, usando Fubino y el TFC, $\int_\sigma d\omega = \int_{I^2} (g_x - f_y) dx dy = \int_0^1 [(g(1,y) - g(0,y)] dy + \int_0^1 [(f(x,0) - f(x,1)] dx = \int_{\partial\sigma} d\omega$. El caso general se reduce a este caso usando problemas 13 y 16.

Problema 19. Si f es holomorfa y C^1 en $U \subset \mathbb{C}$ entonces (a) $\int_c f dz = 0$ para toda 1-cadena exacta c. (b) $\int_c df = 0$ para toda 1-cadena cerrada c.

Problema 20. Sea $\gamma : I \to \mathbb{C}^*$, $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ y $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{C}^*)$, $\alpha = dz/z$. Entonces γ y α son cerradas pero no exactas. *Sug.* Calcula $\int_\gamma \alpha$.

Problema 21. Para toda 1-cadena cerrada c en $\mathbb{C}^*$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}.$$



Sug. (a) c es una suma de "circuitos cerrados"; un circuito cerrado C es la partición de una curva cerrada γ suave por pedazos en una suma de curvas, $C = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, donde $\gamma : [0, n] \to U$, $\gamma(0) = \gamma(n)$, y $\gamma_i : I \to U$, $\gamma_i(t) = \gamma(i - 1 + t)$. Para ver esto, se asocia con c una gráfica dirigida que cumple la "1era ley de Kirchhoff": en cada vértice entran y salen el mismo número de aristas (usando $\partial c = 0$). Luego, por inducción sobre el número de aristas, tal gráfica es la suma de circuitos cerrados.

(b) La integral de una 1-forma en un circuito cerrado es la integral sobre la curva cerrada correspondiente, $\int_C \alpha = \int_\gamma \alpha$.

(c) Cada curva cerrada γ en $\mathbb{C}^*$ es homotópica a una curva cerrada δ en $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ que empieza y termina en 1. (Define $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t)/|\gamma(t)|$, luego $\delta(t) = \hat{\gamma}(t)/\hat{\gamma}(0)$).

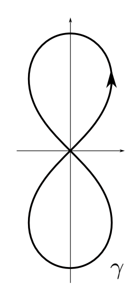
(d) $\pi_1(S^1, 1)$ es un grupo cíclico infinito, generado por $\gamma_1(t) := e^{2\pi it}$. Así que δ es homotópica a γ_n, para algun $n \in \mathbb{Z}$, donde $\gamma_n(t) = e^{2\pi int}$.

(e) Curvas homotópicas son homólogas (problema 3c), y dz/z es cerrada, así que $\int_C dz/z = \int_\gamma dz/z = \int_{\gamma_n} dz/z = 2\pi in$.

Definición. El entero $[\int_c dz/z]/(2\pi i)$ del problema anterior es el *índice* $\mathrm{ind}(c, 0)$ del origen con respecto a c. Cuando c es una curva cerrada γ en $\mathbb{C}^*$, esto se llama tambien "el número de vueltas de γ alrededor de 0"(el "winding number"). Más general, si c es una 1-cadena cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, entonces

$$\mathrm{ind}(c, z_0) := \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{dz}{z - z_0} \in \mathbb{Z}$$

es el índice de z_0 con respecto a c.



Problema 22. Considera la curva parametrizada γ de la figura. Para cada punto z_0 en el complemento de la imagen de γ en $\mathbb{C}$ calcula el índice $\mathrm{ind}(\gamma, z_0)$.

Problema 23. (a) En un disco abierto en $\mathbb{C}$, toda 1-forma cerrada es exacta, y toda 1-cadena cerrada es exacta. (b) Mismo para cualquier subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo.