

## Notas 1 Repaso de cálculo vectorial

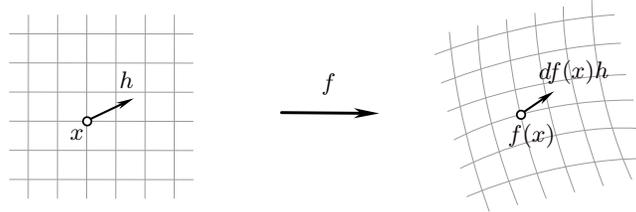
15 de enero de 2025

*Nota.*  $U$  denota un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición.** Una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  es *diferenciable* en un punto  $x \in U$  si existe una  $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  (una transformación lineal  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} \rightarrow 0. \quad (1)$$

A la transformación lineal  $L$ , si existe, se llama *la derivada de  $f$  en  $x$*  y se denota por  $df(x)$ . Luego,  $f$  es *diferenciable* si es diferenciable para todo  $x \in U$ . En este caso, se denota por  $df : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  a la función  $x \mapsto df(x)$ .



*Notas.*

1. Para que el límite en (1) tenga sentido suponemos que  $h \neq 0$  y que  $x+h \in U$ . Como  $U$  es abierto, existe un  $\epsilon > 0$  tal que esto se cumple para todo  $h \in \mathbb{R}^n$  tal que  $0 < |h| < \epsilon$ .
2. Otras notaciones comunes para  $df$  son  $Df$  y  $f_*$ . Una notación para  $df(x)h$  es  $D_h f(x)$  (“la derivada direccional de  $f$  en  $x$  en la dirección  $h$ ”). Si  $m = 1$ , o sea  $f$  es una función real diferenciable,  $df(x) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$  (el espacio dual a  $\mathbb{R}^n$ ), y  $df : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  se llama *la diferencial* de  $f$ .
3. Ver el siguiente problema, para la justificación de la palabra “la” en el término “la derivada”.

**Problema 1.** Si existe una  $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  que satisface la ecuación (1) entonces es única.

**Problema 2.** La ecuación (1) es equivalente a

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + o(|h|), \quad h \rightarrow 0,$$

donde  $o(|h|)$ ,  $h \rightarrow 0$ , denota una función, digamos  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tal que para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|h| < \delta$  implica  $|r(h)| \leq \epsilon|h|$ .

**Problema 3.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una transformación lineal entonces es diferenciable y  $df(x) = f$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Problema 4.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función.

- (a) Diferenciabilidad de  $f$  en algún  $x \in (a, b)$  según la definición de la ecuación (1) coincida con la definición usual de cálculo de una variable: existencia del límite  $f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x))/h$ .
- (b) Si  $f$  es diferenciable en  $x \in (a, b)$  entonces  $df(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la transformación lineal  $h \mapsto f'(x)h$ .
- (c) Si  $f$  es diferenciable entonces  $df = f'dx$ .

**Problema 5.** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable entonces

- (a)  $df(x)h = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x+th)$  para todo  $x \in U$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ ;
- (b)  $f$  es continua;
- (c) si  $f = (f_1, \dots, f_m)$  entonces las derivadas parciales  $\partial f_i / \partial x_j$  existen;
- (d) la *matriz Jacobiana* (la matriz de derivadas parciales), en un punto  $x \in U$ , es la matriz de  $df(x)$  con respecto a las bases canónicas en  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ ;
- (e)  $df = \sum_{j=1}^n (\partial f_i / \partial x_j) dx_j$ .

**Problema 6.** Encuentra la derivada  $df$  de cada una de las siguientes funciones  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dar cada respuesta como una combinación lineal de  $dx, dy$ , y también de  $dz, d\bar{z}$ .

*Nota.* Identificamos  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ,  $x + iy \mapsto (x, y)$ .

- (a)  $f(x + iy) = x^2 + iy^2$ . (b)  $f(z) = z^2$ . (c)  $f(z) = |z|$ ,  $z \neq 0$ . (d)  $f(z) = 1/\bar{z}$ ,  $z \neq 0$ .

*Ejemplo.* Inciso (a):

$$\begin{aligned} df &= d(x^2 + iy^2) = (2x)dx + (2iy)dy \\ &= x(dz + d\bar{z}) + y(dz - d\bar{z}) = (x+y)dz + (x-y)d\bar{z}. \end{aligned}$$

**Teorema.** Si  $f$  es  $C^1$  (las derivadas parciales de  $f$  existen y son continuas) entonces  $f$  es diferenciable.

**Problema 7.** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable. Entonces  $f$  es  $C^1$  ssi  $df : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  es continua.

*Nota.* Se usa la topología en  $\text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  heredada por su identificación usual con  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{mn}$ .

**Problema 8.** Encuentra ejemplos de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que (a)  $f$  es diferenciable pero no  $C^1$ ; (b) las derivadas parciales existen pero  $f$  no es diferenciable.

**Teorema.** La suma de funciones diferenciables es diferenciable. El producto de funciones diferenciables  $U \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable. El cociente de funciones diferenciables  $U \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, si el denominador no se anula.

**Teorema** (La regla de la cadena). Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  abiertos. Si  $f : U \rightarrow V$  y  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  son funciones diferenciables entonces  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  es diferenciable y para todo  $x \in U$   $d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x)$ , donde  $y = f(x)$ .

*Nota.* Menos preciso (pero más fácil recordar): “la derivada de la composición es la composición de las derivadas.”

**Teorema** (El Teorema de la Función Inversa). Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  es  $C^1$  y  $df(x)$  es invertible para algún  $x \in U$ , entonces existen vecindades  $U_1 \subset U$  de  $x$  y  $V_1 \subset V$  de  $f(x)$  tal que la restricción de  $f$  a  $U_1$  define un difeomorfismo  $U_1 \rightarrow V_1$  (una función diferenciable biyectiva con inversa diferenciable).

**Problema 9.** En el teorema anterior, si  $f_1 : U_1 \rightarrow V_1$  es el difeomorfismo inducido por  $f$ ,  $g_1 = (f_1)^{-1}$  y  $y = f(x)$ , entonces  $dg_1(y) = [df_1(x)]^{-1}$  (igualdad de transformaciones lineales).

**Problema 10.** Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z^2$ .

- (a) Calcula la matriz Jacobiana de  $f$  en  $z_0 \in \mathbb{C}$ .
- (b) Determina las  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $df(z_0)$  es invertible.
- (c) Para cada  $z_0 \in \mathbb{C}$  del inciso anterior encuentra unas vecindades maximales  $U_1, V_1 \subset \mathbb{C}$  de  $z_0$  y  $(z_0)^2$  (resp.) tales que  $f$  define un difeomorfismo entre ellas.

**Problema 11.** Repite el problema anterior para

- (a)  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = 1/z$ .

*Nota.*  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- (b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

**Problema 12.** Sea  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = 1/z^2$ . Confirma la regla de la cadena, expresando  $f$  como la composición de  $z \mapsto z^2$  y  $w \mapsto 1/w$ , calculando las derivadas de estas funciones en  $z_0$  y  $w_0 = 1/z_0$  (puedes usar los últimos dos problemas), luego la derivada de  $f$  en  $z_0$  (esto lo haces directamente), y verificar que la última derivada es la composición de las 1eras dos.