Tarea núm. 9 (problemas adicionales)

(para el 14 oct, 2024, 9:30am)

1. *a*) Sean X, Y espacios topológicos. Define: $f : X \to Y$ es una *cubierta*.

   Nota. Puedes usar tu texto favorito, e.g. Rotman, p. 273, o incluso Wikipedia. Hay diferencias ligeras entre textos, pero no son esenciales, ya que nos restringimos al caso que Y es arco-conexo.

   b) Demuestra que las siguientes funciones son cubiertas:

   (i) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) := z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $\exp(z) := e^z$.

   (iii) (Opcional) $p : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C} \setminus D'$, donde $p(z)$ es un polinomio, D es el conjunto de ceros de $p'(z)$ y $D' = p(D)$.

   c) (Opcional) Demuestra que $f(z) := \displaystyle\int_0^z e^{t^2} dt$ define un biholomorfismo local suprayectivo $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (i.e., $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$), que *no* es una cubrierta. Mismo para la función $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{e^z}$.

2. *a*) Usa el problema 1b(i) arriba y la teoría de espacios cubrientes para dar una demostración del siguiente: para todo subconjunto abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}^*$, $z_0 \in U$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $w_0^n = z_0$, existe una única función holomorfa inyectiva $f : U \to \mathbb{C}^*$, tal que $f(z)^n = z$ y $f(z_0) = w_0$.

   b) Usa el problema 1b(ii) para formular y demostrar un resultado similar para la función e^z.