Tarea núm. 8

(para el 7 oct, 2024, 9:30am)

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto propio ($U \neq \mathbb{C}$) simplemente conexo. El *radio conforme* de U desde un $p \in U$ fue definido en clase como $r(U, p) := 1/|f'(p)|$, donde $f : U \to D$ es un biholomorfismo tal que $f(p) = 0$.

   (a) Sea $p \in D$. Calcula el radio conforme $r(D, p)$.

   (b) Sean $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ dos abiertos propios simplemente conexos. Sea $f : U_1 \to U_2$ un biholomorfismo y $p \in U_1$. Entonces $r(U_2, f(p)) = |f'(p)| r(U_1, p)$.

2. Sea $U \subset \mathbb{C}^*$ un abierto simplemente conexo, $z_0 \in U$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = z_0$. Probar:

   (a) Existe una única función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = w_0$ y $f'(z) = 1/z$ para todo $z \in U$

   (b) $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in U$.

   (c) En el caso $U = \mathbb{C} \setminus (\infty, 0]$, $z_0 = 1, w_0 = 0$, encontrar una fórmula explícita de f en coordenadas polares.

3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f : U \to \mathbb{C}^*$ una función holomorfa. Probar que existe una función holomorfa $g : U \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = f(z)$ para todo $z \in U$.

4. Sea $U \subset \mathbb{C}^*$ un abierto simplemente conexo y $n \in \mathbb{N}$. Probar que existe una $f \in U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z)^n = z$, para todo $z \in U$.

5. Ahlfors, p 232, prob 1 y 2.

6. (Opcional) SS: p 251, prob 13; p 256, prob 3.