Tarea núm. 7

(para el 30 sept, 2024, 9:30am)

1. Demuestra

(a) $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (isomorfismo de grupos).

Nota. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* I$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $I := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{I, -I\}$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$.

(b) Toda $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, $f \neq id$, tiene 1 o 2 puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$.

(c) Si $f_1, f_2 \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ son conjugadas, es decir, existe una $g \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $g \circ f_1 \circ g^{-1} = f_2$, entonces z_1 es un punto fijo de f_1 ssi $z_2 := g(z_1)$ es un punto fijo de f_2. Además, $f_1'(z_1) = f_2'(z_2)$.

Nota. Si ∞ es un punto fijo de una $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ se define $f'(\infty) := \tilde{f}'(0)$, donde $\tilde{f}(w) := 1/f(1/w)$.

(d) Toda $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, $f \neq id$, es conjugada a (i) $z \mapsto z + c$, $c \neq 0$, o (ii) $z \mapsto cz$, $c \neq 0, 1$. Encuentra los puntos fijos en cada caso.

Resp. (i) ∞, (ii) $0, \infty$.

Sug. Usa el teorema de Jordan: toda matriz compleja 2×2 es conjugada a una matriz de la forma (i) $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, o (ii) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Definición. En caso (i) f se llama *parabólica*; en caso (ii) f se llama *elíptica* si $|c| = 1$, e *hiperbólica* si $|c| \neq 1$ (o *laxodrómica*, en algunos textos).

(e) Si f es parabólica, con punto fijo z_0, entonces $f'(z_0) = 1$ y

$$\lim_{n \to \pm\infty} f^n(z) = z_0$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$.

Nota. Para $n > 0$, f^n significa f compuesta con su misma n veces y $f^{-n} := (f^{-1})^n$.

(f) Si f es elíptica o hiperbólica, con puntos fijos $z_\pm$, entonces $f'(z_+)f'(z_-) = 1$.

(g) Si f es elíptica, con puntos fijos $z_\pm$, entonces $|f'(z_+)| = |f'(z_-)| = 1$.

(h) Si f es hiperbólica, con puntos fijos $z_\pm$, entonces $|f'(z_\pm)| \neq 1$. Si $|f'(z_+)| < 1 < |f'(z_-)|$ entonces

$$\lim_{n \to \pm\infty} f^n(z) = z_\pm$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_+, z_-\}$.

Sug. En incisos (e)-(h), usando (c)-(d), basta considerar los casos (i)-(ii) del (d).

(i) Usamos el isomorfismo del inciso (a) para definir una topología en $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Demuestra que en esta topología la unión de las transformaciones elípticas e hiperbólicas es un subconjunto abierto y denso en $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.

Sug. $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ determina una transformación de Möbius parabólica o la identidad ssi $\mathrm{tr}(A) = \pm 2$.

(j) (Opcional) Dada $f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, el número de funciontes racionales $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f = g \circ g \circ g \circ g \circ g$ es 1,5 ó ∞. Explica cómo determinar cual de las 3 opciones sucede para una f dada.

2. Demuestra que $f(z) = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ define un biholomorfismo $D \cap \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, donde $D := \{|z| < 1\}$, $\mathbb{H} := \{\mathrm{Im(z)} > 0\}$.

   Sug. La ecuación $f(z) = w$ se reduce a la ecuación cuadrática $z^2 + 2wz + 1 = 0$, con dos raices distintas cuando $w \neq \pm 1$.

3. Sea $f : \mathbb{H} \to D$ holomorfa con $f(i) = 0$. Demuestra que

$$|f(z)| \leq \left|\frac{z - i}{z + i}\right|$$

   para todo $z \in \mathbb{H}$.

   Sug. Usar el Lemma de Schwarz.

4. Sea $f : D_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa, con $|f(z)| \leq M$ para algun $M > 0$ y todo $z \in D_R(0)$. Demuestra que

$$\left|\frac{f(z) - f(0)}{M^2 - \overline{f(0)}f(z)}\right| \leq \frac{|z|}{MR}.$$

   Sug. Usar el Lemma de Schwarz.

5. *a*) Si $f : D \to D$ es holomorfa con dos puntos fijos entonces $f = id$.

   Sug. Si 0 es un punto fijo usa el Lemma de Schwarz. Si $z_0 \neq 0$ es un punto fijo existe una $g \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $g(z_0) = 0$, luego 0 es un punto fijo de $g \circ f \circ g^{-1}$.

   b) Cierto o Falso: toda función holomorfa $f : D \to D$ tiene un punto fijo.