Tarea núm. 6

(para el 23 sept, 2024, 9:30am)

1. (Opcional) Probar que toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ es el cociente de dos funciones enteras.

   Sug. Sea $\{z_i\}$ el conjunto de polos de una función meromorfa f en $\mathbb{C}$. Existe una función entera g, no nula, con ceros en los z_i: si el conjunto es finito se puede tomar un polinomio y si es infinito se puede arreglar que $z_i \to \infty$ y usar el *Teorema de Factorización de Weierstrass* (SS p.145, Ahlfors p. 195). Entonces $h := fg$ es entera y $f = h/g$.

2. (Opcional) Sea f una función entera y n un número entero positivo. Probar que existe una función entera g tal que $g^n = f$ si y solo si el orden de todos los ceros de f es divisible por n.

3. Dados $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ distintos, se define su *razón cruzada* por

   $$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

   Demuestra que

   a) La definición de razón cruzada se extiende naturalmente a una función de 4 puntos distintos en $\hat{\mathbb{C}}$, con valores en $\hat{\mathbb{C}}$. También se extiende cuando 2 de los 4 puntos coinciden.

   b) Toda transformación de Möbius (automorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$) preserva la razón cruzada. Esto es, si $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ y $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ entonces $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.

   c) La razon cruzada de 4 puntos distintos es real ssi los puntos son cocíclicos o colineales (sobre un círculo o línea).

   Sug. Usar el problema 5 abajo.

4. Encontrar la transformación de Möbius que envía (a) $i, -1, 1$ en $-1, -i, 1$; (b) $-1, -i, 1$ en $-1, 0, 1$; (c) $1, -1, i$ en $1, i, -1$.

   Sug. Usa el inciso (b) del problema anterior.

5. Demuestra

   a) Toda transformación de Möbius es una de las transformaciones $z \mapsto \lambda z$, $z \mapsto z + z_0$, $z \mapsto 1/z$, o una composición de ellas.

   b) Demuestra que toda transformación de Möbius manda rectas y círculos a rectas y círculos.

   Sug. Usa el inciso anterior.

   c) Sean C, D dos círculos o rectas en $\mathbb{C}$. Probar que existe una trasnformación de Möbius f tal que $f(C) = D$.

6. Sea $f(z) = (z - i)/(z + i)$. Calcular $f(\mathbb{R})$, $f(i + \mathbb{R})$, $f(D)$, donde $D = \{|z| < 1\}$.

7. Sea $f(z) = (z + 1)/(z - 1)$. Calcular la imagen por f de las rectas verticales.

8. Sea f una transformación de Möbius tal que $f(\hat{\mathbb{R}}) \subset \hat{\mathbb{R}}$. Probar que se puede encontrar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = (az + b)/(cz + d)$.

9. Probar que dados 4 puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ existen $z \in \mathbb{C}$ y una trasnformación de Möbius f tal que $f(z_1) = 1, f(z_2) = -1, f(z_3) = z$ y $f(z_4) = -z$.