Tarea núm. 5

(para el 16 sept, 2024)

1. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dadas por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta), g(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

   a) Denotamos a la derivada de f en $(-1,\pi/3)$ por A, la derivada de g en $f(-1,\pi/3)$ por B y la derivada de $g \circ f$ en $(-1,\pi/3)$ por C. Encuentra fórmulas explicitas para A, B, C (sin usar la regla de la cadena).

   b) ¿Qué relación debe existir entre A, B, C segun la regla de la cadena? Confirma que tu respuesta del inciso anterior cumple esa relación.

   c) ¿Existe una inversa diferenciable de f en alguna vecindad de $(-1,\pi/3)$? En caso que sí, encuentra la derivada de esta inversa en $f(-1,\pi/3)$.

   d) Encuentra el conjunto U de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ tal que la derivada de f en p es inyectiva. Restringida a U, ¿f es inyectiva? En caso que no, encuentra un subconjunto abierto maximal de U en donde f es inyectiva. Mismo para g.

   e) ¿Es f holomorfa? Mismo para g.

   f) ¿Es f una función abierta? Mismo para g. (Una función es abierta si manda abiertos a abiertos).

2. Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, donde $f_i(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$ y $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Encuentra la derivada de f en un punto $p \in \mathbb{R}^m$.

   Sug. Usa la fórmula para la derivada de f en x: $Df(x)v = \gamma'(0)$, donde $\gamma(t) = f(x) + tv$.

3. a) Sea $f : U \to V$ holomorfa no constante, donde $U, V \subset \mathbb{C}$ son abiertos, $z_0 \in U$ y $w_0 = f(z_0)$. Demuestra que existe un único entero positívo k, un $\epsilon > 0$, unas vecindades abiertas $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ de z_0, w_0 (resp.), y unos biholomorphismos $\phi : U_0 \to D_\epsilon(0), \psi : V_0 \to D_{\epsilon^k}(0)$ tal que $\phi(z_0) = \psi(w_0) = 0$ y $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : D_\epsilon(0) \to D_{\epsilon^k}(0)$ está dado por $u \mapsto u^k$. El entero k es el máximo entero positivo tal que las primeras $k-1$ derivadas de f en z_0 se anulan ($k = 1$ si $f'(z_0) \neq 0$).

   Sug. Suponemos que $z_0 = w_0 = 0$, así que $f(z) = z^k g(z)$, en una vecindad de $z = 0$, con g holomorfa y $g(0) \neq 0$. Luego existe una $h(z)$ holomorfa en una vecindad de $z = 0$, tal que $h(z)^k = g(z)$; ver prob 4 de tarea 4. Define $\phi(z) := zh(z)$, entonces $\phi'(0) \neq 0$ y $f(z) = \phi(z)^k$.

   b) Usa el inciso anterior para resolver problemas 1 y 2 de la tarea 4.

4. Sea $\epsilon > 0$ y $f : D_\epsilon(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con singularidad esencial en $z = 0$. Demuestra que f no es inyectiva.

   Sug. Usa que la imagen de f es densa en $\mathbb{C}$ y que f es una función abierta.

5. (Opcional). Sea $p(z)$ un polinomo de grado $d > 1$. Demuestra que los ceros de $p'(z)$ se encuentran en la *envoltura convexa* de los ceros de $p(z)$. (La envoltura convexa de un conjunto es la intersección de todos los subconjuntos convexos que lo contienen)

   Sug. Escribir $p(z)$ como producto de factores lineales y considerar a $p'(z)/p(z)$.