Tarea núm. 4

(para el 9 sept, 2024)

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. Demuestra:

   a) $f(U) \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto abierto.

   b) $|f(z)|$ no tiene máximos locales en U.

   c) Para todo $w_0 \in \mathbb{C}$ el conjunto $f^{-1}(w_0)$ no tiene un punto de acumulación en U.

2. Sea $f : U \to V$ una función holomorfa biyectiva donde $U, V \subset \mathbb{C}$ son abiertos. Demuestra que $f^{-1} : V \to U$ es holomorfa.

   Nota. Una función holomorfa biyectiva entre dos abiertos es un *biholomorfismo.*

3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y $z_0 \in U$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Demuestra que f define un biholomorfismo entre una vecindad de z_0 y una vecindad de $f(z_0)$. (*Sug.* Usa el teorema de función inversa).

4. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$. Probar que existe un $\delta > 0$, un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y un biholomorfismo $f : D_\delta(z_0) \to U$ tal que $(f(z))^n = z$ para todo $z \in D_\delta(z_0)$,

5. Encuentra biholomorfismos entre los siguiente abiertos en $\mathbb{C}$ o demuestra que no existen.

   a) $\mathbb{C}$

   b) $\{z \mid |z| < 1\}$

   c) $\{z \mid |z| < 2\}$

   d) $\{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$

   e) $\{re^{i\theta} \mid r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$

   f) $\{re^{i\theta} \mid r > 0,\ 0 < \theta < 0.2024\}$.

   Resp. $a \not\approx b \approx c \approx d \approx e \approx f$.