Tarea núm. 1 - soluciones

(para el 19 ago, 2024)

1. Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una transformación $\mathbb{R}$-lineal. Demuestra que los siguientes son equivalentes:

a) T es $\mathbb{C}$-lineal.

b) $T(iz) = iT(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

c) Existe un $c \in \mathbb{C}$ tal que $T(z) = cz$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

d) La matriz de T, con respecto a la base $\{1, i\}$, es de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, para unos $a, b \in \mathbb{R}$.

e) Si $T \neq 0$ entonces T preserva orientación (i.e., $\det(T) > 0$) y manda círculos a círculos.

f) Si $T \neq 0$ entonces T preserva orientación y ángulos entre rectas.

Solución. Omito la demostración de la equivalencia de los 1eros 4 incisos ya que sigue inmediatamente de las definiciones de $\mathbb{C}$- y $\mathbb{R}$-linealidad. Estos son: una funcíon $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una transformación $\mathbb{C}$-lineal si (1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$; (2) $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ para todo $\lambda, v \in \mathbb{C}$. La definición de transformación $\mathbb{R}$-lineal es la misma, excepto que en (2) solo se pide $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(a) \Rightarrow (e)$:

Sea $T(z) = cz$, donde $c = a + ib \neq 0$. Entonces $\det T = a^2 + b^2 > 0$. Sea $C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ (el círculo de radio r centrado en $z_0 \in \mathbb{C}$). Entonces

$$\begin{aligned} T(C_r(z_0)) &= \{cz \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} = \{w \in \mathbb{C} \mid \ |(w/c) - z_0| = r\} = \\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid \ |w - cz_0| = |c|r\} = C_{|c|r}(cz_0). \end{aligned}$$

$(e) \Rightarrow (a)$:

Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una transformacíon $\mathbb{R}$-lineal con $\det T > 0$ que manda círculos a círculos. Primero suponemos que $T(1) = 1$. Entonces la matriz de T es de la forma $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, con $d > 0$ y tenemos que demostrar que $b = 0$ y $d = 1$; es decir, $T = I$ (la identidad). Sea C el círculo $\{x^2 + y^2 = 1\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v^t v = 1\}$. Entonces

$$T(C) = \{Tv \mid v^t v = 1\} = \{w \mid (T^{-1}w)^t (T^{-1}w) = 1\} = \{w \mid w^t S w = 1\},$$

donde

$$S = (T^{-1})^t T^{-1} = \frac{1}{d^2} \left(\begin{array}{cc} d^2 & -bd \\ -bd & 1 \end{array} \right).$$

Luego, $T(C)$ es un círculo ssi $d^2 = 1$ y $bd = 0$. Como $d > 0$ esto implica $d = 1, b = 0$.

Si $c := T(1) \neq 1$ consideramos a $T_1 := S^{-1}T$, donde $S(z) = cz$. Luego T_1 tambien manda círculos a círculos y $T_1(1) = 1$, así que $T_1 = I$. Esto es, $T = S$, una transformación $\mathbb{C}$-lineal.

$(c) \iff (f)$:

Una transformación $\mathbb{C}$-lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto cz$, $c = re^{i\theta} \neq 0$, es una *similitud*, la composición de rotación, $z \mapsto e^{i\theta}z$, con dilatación, $z \mapsto rz$, lo cual deja inviariante los ángulos entre rectas (o cualquier dos curvas).

En la otra dirección, si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformacion lineal que preserva ángulos y orientación, al tomar su composición con una transformación $\mathbb{C}$-lineal, podemos suponer, in perdida de generalidad, que $T(1) = 1$, por lo que $T(i) = di$ para algun $d \in \mathbb{R}$, $d = \det T > 0$. Luego, $T(1 + i) = 1 + di$ y debe formar ángulo de 45^0 con el eje de x, por lo que $d = 1$.

2. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $z \in U$ y $f : U \to \mathbb{C}$ suave (C^1 es suficiente). Demuestra que los siguientes son equivalentes:

a) La derivada de f en z es una transformación $\mathbb{C}$-lineal.

b) f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman en z.

c) f es holomorfa en z; es decir, $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe y es independiente de la manera en que h tiende a 0.

(Más formalmente: existe un $d \in \mathbb{C}$ tal que para toda sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que $h_n \neq 0$ y $z + h_n \in U$ para todo $n \geq 1$, si $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{f(z+h_n)-f(z)}{h_n} = d$.)

Solución.

$(a) \iff (b)$:

Sea $f = u + iv$. La matriz de Df es $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$. Segun el ejercisio anterior, es la matriz de una transformación $\mathbb{C}$-lineal ssi $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$.

$(c) \Rightarrow (b)$:

Si $h = \Delta x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f_x = u_x + iv_x.$$

Si $h = i\Delta y \in i\mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{i\Delta y} = -if_y = v_y - iu_y.$$

Los dos límites coinciden, por lo que $u_x + iv_x = v_y - iu_y \Rightarrow u_x = v_y, v_x = -u_y$.

$(b) \Rightarrow (c)$:

Suponemos que $f : U \to \mathbb{C}$ es diferenciable y que su derivada en $z \in U$ es $\mathbb{C}$-lineal, dada por multiplicación por una constante compleja c. Por definición de diferenciabilidad,

$$f(z+h) = f(z) + ch + \epsilon(h)|h|,$$

donde $\epsilon(h)$ es una funcíon compleja, definida en una vecindad V de 0 tal que $z + V \subset U$, y satisface $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. Dividiendo esta ecuación entre $h \neq 0$ y rearreglando,

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - c \right| = \left| \frac{\epsilon(h)|h|}{h} \right| = |\epsilon(h)| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Nota. No era necesario suponer que f es C^1 en este problema. Solo usamos que es diferenciable en un punto.

3. Sea $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$ y ∂D su frontera, orientada en contra las manecias del reloj. Sea $\beta := y\, dx\, dy$ (una 2-forma en $\mathbb{R}^2$).

a) Encuentra una 1-forma α tal que $\beta = d\alpha$.

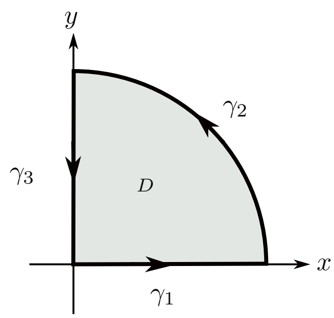
Solución. Hay muchas opciones. Tomamos $\alpha = -\frac{y^2}{2} dx$.

b) Verifica mediante un cálculo explicito de los dos lados de la ecuación que

$$\int_D \beta = \int_{\partial D} \alpha.$$

Solución. Para calcular $\displaystyle\int_{\partial D} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha + \int_{\gamma_2} \alpha + \int_{\gamma_3} \alpha$, notamos que $\alpha = 0$ a lo largo de γ_1 y γ_3 ($y = 0$ en el 1ero y $dx = 0$ en el 2do). Para calcular $\displaystyle\int_{\gamma_2} \alpha$ parametrizamos γ_2 por $x = \cos\theta, y = \operatorname{sen}\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$, así que

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^3 d\theta = \frac{1}{3}.$$



Para calcular $\displaystyle\int_D \beta$ usamos coordenadas polares, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $\beta = r^2 \sin\theta dr\, d\theta$, así que

$$\int_D \beta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r^2 dr\right) \sin\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin\theta = \frac{1}{3}.$$

c) ¿Entiendes porqué sucede esto?

Solución. Es un caso especial del Teorema de Stokes: $\displaystyle\int_{\partial c} \alpha = \int_c d\alpha$. Ver estas notas.

4. *a*) Demuestra que toda 1-forma compleja suave en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es de la forma $\alpha = f dz + g d\bar{z}$, donde $f, g : U \to \mathbb{C}$ son funciones complejas suaves, $dz = dx + idy$ y $d\bar{z} = dx - idy$.

Sug. Por definición, $\alpha = udx + vdy$ para unos $u, v : U \to \mathbb{C}$ suaves. Escribe a dx, dy en término de $dz, d\bar{z}$.

Solución. $\displaystyle\alpha = udx + vdy = u\frac{dz + d\bar{z}}{2} + v\frac{dz - d\bar{z}}{2i} = \frac{u - iv}{2}dz + \frac{u + iv}{2}d\bar{z}.$

b) Demuestra que si $g = 0$, i.e., $\alpha = f dz$, entonces α es cerrada ssi f es holomorfa.

Solución. Si $f = u + iv$ entonces

$$d(f dz) = df dz = (f_x dx + f_y dy)(dx + idy) = i[(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)]dxdy,$$

asi que $d(f dz) = 0$ ssi $= u_x - v_y = v_x + u_y = 0$. Estas son las ecuaciones de CR.

5. Encuentra la imagen de una *elipse de Hooke* (una elipse centrada en $0 \in \mathbb{C}$) bajo el mapeo $f(z) = z^2$.

Resp. Una *elipse de Kepler* (una elipse con un foco en $0 \in \mathbb{C}$).

Sug. Hacer 1ero el caso $ax^2 + y^2 = 1$, $a > 0$.

Solución. Consideramos la elipse E_a dada por $ax^2 + y^2 = 1$, con $0 < a < 1$. Su semi-eje mayor es $1/\sqrt{a}$ (a lo largo del eje de x) y su semi-eje menor es 1. Para escribir una ecuación para $f(E_a)$ hacemos en la ecuación de E_a un cambio de variable,

$$Z = f(z) = z^2 = X + iY,\ X_1 := X - \frac{2}{a - 1}.$$

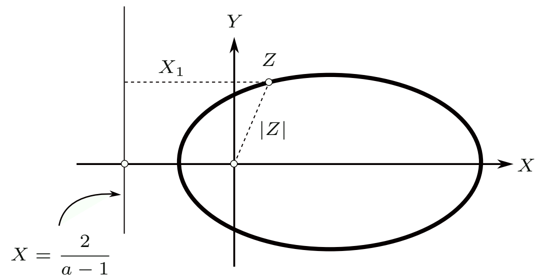
Entonces la ecuación de E_a se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
1 &= a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2=\frac{a}{4}\left(z^2+\bar{z}^2+2|z|^2\right)-\frac{1}{4}\left(z^2+\bar{z}^2-2|z|^2\right)\\
&= \frac{a}{4}\left(Z+\bar{Z}+2|Z|\right)-\frac{1}{4}\left(Z+\bar{Z}-2|Z|\right)=\frac{a-1}{4}\left(Z+\bar{Z}\right)+\frac{a+1}{2}|Z|\\
&= \frac{a-1}{2}X+\frac{a+1}{2}|Z|=\frac{a-1}{2}\left(X_1+\frac{2}{a-1}\right)+\frac{a+1}{2}|Z|=\\
&= \frac{a-1}{2}X_1+\frac{a+1}{2}|Z|+1.
\end{aligned}
$$

Esto lo podemos reescribir como

$$\frac{|Z|}{X_1}=\frac{1-a}{1+a}.$$

Es la ecuación de una elipse, con foco en el origen, directiz $X=2/(a-1)$ y eccentrecidad $e:=\dfrac{1-a}{1+a}<1$.



Una elipse de Hooke general E se obtiene de una de las E_a por rotación y dilatación, $E=re^{i\theta}E_a$. Así que $f(E)=(re^{i\theta})^2f(E_a)=r^2e^{2i\theta}f(E_a)$; esto es, rotacíon por 2θ seguida por dilatación por r^2 de la elipse de Kepler $f(E_a)$, lo cual sigue siendo una elipse de Kepler.

Nota. Dos casos interesantes adicionales son: rectas que no pasan por el origen, e hiperbolas de Hooke (centradas en el origen). Una recta se manda por $f(z)=z^2$ a una parábolas de Kepler (con foco en el origen), y una hipérbolas de Hooke se manda a una rama de hipérbola de Kepler.