Tarea núm. 10

(para el 28 oct, 2024, 9:30am)

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un subconjunto propio abierto simplemente conexo. Demostrar:
   a) Dados $z_0, z_1 \in U$, existe un automorfismo f de U tal que $f(z_0) = z_1$.
   b) Dados $z_0, z_1 \in U$ distintos, existe un único automorfismo f de U tal que $f(z_0) = z_1$ y $f(z_1) = z_0$.
   c) Existen 4 puntos distintos $z_0, z_1, w_0, w_1 \in U$ tal que no existe un automorfismo f de U tal que $f(z_0) = w_0$ y $f(z_1) = w_1$.

   Sug. Estudia primero el caso $U = D$ (o H).

2. Cierto o Falso: existe una funcíon holomorfa suprayectiva $f : D \to \mathbb{C}$.

   Sug. Cambiar D por H.

   Nota. En los siguientes dos problemas, 'convergencia' de sucesión de funciones significa 'convergencia uniforme en subconjuntos compactos.'

3. Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}$, se define $\mathcal{H}(U)$ como el espacio de las funciones holomorfas $f : U \to \mathbb{C}$. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(U)$ una sucesión que converge a una función $f : U \to \mathbb{C}$. Demuestra:
   a) $f \in \mathcal{H}(U)$.
   b) $f_n' \to f'$.

4. Demostrar mediante contraejemplos que la situación descrita en el problema anterior es muy diferente con funciones diferenciable. Esto es, dar ejemplos de sucesiones de funciones diferenciables $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f_n \to f$, pero
   a) f no es diferenciable.
   b) f es diferenciable pero f_n' no converge a f'.
   c) (Opcional) Cierto o Falso: si f es diferenciable, f_n' converge, entonces $f_n' \to f'$.

5. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Para cada $f \in \mathcal{H}(U)$ y $K \subset U$ compacto se define $\|f\|_K := \text{máx}\{|f(z)| \mid z \in K\}$. Sean $K_j \subset U$, $j \in \mathbb{N}$, subconjuntos compactos tales que (i) $K_j \subset K_{j+1}^0$ (el interior de K_{j+1}), $j \in \mathbb{N}$, y (ii) $\cup K_j = U$. Para cada $f \in \mathcal{H}(U)$ se define $\|f\|_j := \text{mín}\{1, \|f\|_{K_j}\}$ y

$$d(f, g) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \|f - g\|_j.$$

   Demuestra:

a) $(f, g) \mapsto d(f, g)$ define una *métrica* en $\mathcal{H}(U)$.

b) Convergencia en $\mathcal{H}(U)$ con respecto a la métrica d es equivalente a convergencia uniforme en subconjuntos compactos de U.

c) El espacio métrico $(\mathcal{H}(U), d)$ es *completo* (toda suceción de Cauchy converge).

d) El mapa $\mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(U)$, $f \to f'$, es contínuo.

e) $F \subset \mathcal{H}(U)$ es relativamente compacto si y solo si F es uniformamente acotado en subconjuntos compactos (para cada $K \subset U$ compacto existe $M > 0$ tal que $\|f\|_K \leq M$ para todo $f \in F$).

   Nota. Por definición, un subconjunto de un espacio topológico es relativamente compacto si su cerradura es compacta.

   Sug. Ver el Teorema 3.3, pág. 225, de SS.

f) Sea $F \subset \mathcal{H}(D)$ la familia de funciones con serie de Taylor

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

   tales que $|a_n| \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces F es relativamente compacta.

g) (Opcional) Sea $S \subset \mathcal{H}(D)$ la familia de las funciones inyectivas con $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Entonces S es compacta. Corolario: para una $f \in S$, si

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

   entonces las a_n son acotados.

   Nota. La *conjetura de Bieberbach*, ahora un teorema, afirma que $|a_n| \leq n$, o sea $S \subset F$.