Tarea núm. 1

(para el 19 ago, 2024)

1. Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una transformación $\mathbb{R}$-lineal. Demuestra que los siguientes son equivalentes:
   a) T es $\mathbb{C}$-lineal.
   b) $T(iz) = iT(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   c) Existe un $c \in \mathbb{C}$ tal que $T(z) = cz$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   d) La matriz de T, con respecto a la base $\{1, i\}$, es de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, para unos $a, b \in \mathbb{R}$.
   e) Si $T \neq 0$ entonces T preserva orientación (i.e., $\det(T) > 0$) y manda círculos a círculos.
   f) Si $T \neq 0$ entonces T preserva orientación y ángulos entre rectas.

2. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $z \in U$ y $f : U \to \mathbb{C}$ suave (C^1 es suficiente). Demuestra que los siguientes son equivalentes:
   a) La derivada de f en z es una transformación $\mathbb{C}$-lineal.
   b) f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman en z.
   c) f es holomorfa en z; es decir, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existe y es independiente de la manera en que h tiende a 0.

   (Más formalmente: existe un $d \in \mathbb{C}$ tal que para toda sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que $h_n \neq 0$ y $z + h_n \in U$ para todo $n \geq 1$, si $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n} = d$.)

3. Sea $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$ y ∂D su frontera, orientada en contra las manecias del reloj. Sea $\beta := y\, dx\, dy$ (una 2-forma en $\mathbb{R}^2$).
   a) Encuentra una 1-forma α tal que $\beta = d\alpha$.
   b) Verifica mediante un cálculo explicito de los dos lados de la ecuación que
   $$\int_D \beta = \int_{\partial D} \alpha.$$
   c) ¿Entiendes porqué sucede esto? (*Sug.* Ver estas notas.)

4. *a*) Demuestra que toda 1-forma compleja suave en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es de la forma $\alpha = f dz + g d\bar{z}$, donde $f, g : U \to \mathbb{C}$ son funciones complejas suaves, $dz = dx + i dy$ y $d\bar{z} = dx - i dy$.

   Sug. Por definición, $\alpha = u dx + v dy$ para unos $u, v : U \to \mathbb{C}$ suaves. Escribe a dx, dy en término de $dz, d\bar{z}$.

   b) Demuestra que si $g = 0$, i.e., $\alpha = f dz$, entonces α es cerrada ssi f es holomorfa.

5. Encuentra la imagen de una *elipse de Hooke* (una elipse centrada en $0 \in \mathbb{C}$) bajo el mapeo $f(z) = z^2$. *Resp.* Una *elipse de Kepler* (una elipse con un foco en $0 \in \mathbb{C}$). *Sug.* Hacer 1ero el caso $ax^2 + y^2 = 1$, $a > 0$.