Examen parcial - respuestas

6 nov, 2024

Parte A: El teorema de mapeo de Riemann

1. (5 pts) Enunciar el teorema.

   ▷ Todo par de subconjuntos propios abiertos simplemente conexos en $\mathbb{C}$ son biholomorfos.

2. (45 pts) Dar un bosquejo de la demostración, los ingredientes/lemmas principales (max una hoja). ¿Cuál de estos ingredientes te parece el más importante?

   ▷ Basta demostrar que todo subconjunto abierto propio simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$ es biholomorfo a D. Se fija un punto $p_0 \in U$ y se define

$$\mathcal{F} := \{f : U \to D \mid f \text{ es holomorfa e inyectiva, } f(p_0) = 0,\ f'(p_0) > 0\}.$$

   Se muestra que $\mathcal{F}$ contiene el biholomorfismo buscado, siguiendo estos pasos:

   - $\mathcal{F}$ no es vacia. Aplicando una translación a U, suponemos que $0 \neq U$, por lo que existe una raíz cuadrada $f_0 : U \to \mathbb{C}$ *inyectiva*. Sea $z_0 = f_0(p_0)$. Luego, $-z_0 \notin f_0(U)$, por lo que existe $D_r(-z_0) \subset \mathbb{C} \setminus f_0(U)$ para algun $r > 0$. Luego existe un $f_1 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ tal que $f_1(D_r(-z_0)) = D$, por lo que $f_1(f_0(U)) \subset \mathbb{C} \setminus D$, y luego tomando $f_2(z) := 1/z$, tenemos que $(f_2 \circ f_1 \circ f_0)(U) \subset D$. Sea $z_2 = (f_2 \circ f_1 \circ f_0)(p) \in D$. Luego existe un automorfismo f_3 de D tal que $f := f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_0$ satiface $f(p_0) = 0$, $f'(p_0) > 0$; es decir, $f \in \mathcal{F}$.
   - Se define $\alpha := \sup\{f'(p) | f \in \mathcal{F}\}$ y se demuestra $\alpha < \infty$, usando el Lemma de Schwarz.
   - Se toma una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tal que $\lim f_n'(p_0) = \alpha$ y se muestra que tiene una subsucesión convergente, en la topología de convergencia uniforme en subconjuntos compactos de U, usando el Teorema de Arzela-Ascoli. Esto requiere que en cada subconjunto compacto de U la sucesión sea (1) acotada unifórmamente, y (2) equicontínua. (1) se cumple por la definición de $\mathcal{F}$, (2) se muestra usando la fórmula integral de Cauchy.
   - La función límite $f = \lim f_n$ es (1) holomorfa (límite uniforme de holomorfas es holomorfa, por la fórmula integral de Cauchy y Morera); (2) inyectiva (Lemma de Schwarz); (3) suprayectiva. Este último paso es capaz el más ingenioso de la prueba (en mi opinión), usando el Lemma de Scwharz. De nuevo, si f no es suprayectiva, $0 \notin f(U)$, sin perdida de generalidad, y entonces se define una raíz cuadrada inyectiva $h : f(U) \to D$. Componiendo con un automorfismo g de D, $f_1 := g \circ h \circ f \in \mathcal{F}$, ie $f_1(p_0) = 0$, $f_1'(p_0) > 0$. Luego, por el Lemma de Schwarz, como $z \mapsto z^2$ es una contraccion en D (con respecto a la métrica hiperbólica) su inversa, h, es una *expansion*, por lo que $f_1'(p) > f'(p)$. Contradicción.

   La parte más significativa: Geométricamente, el Lemma de Schwarz; analíticamente, Arzela-Ascoli. Claro, cuestión de gusto.

Parte B: (50 pts) Cierto o Falso

En caso de "Cierto" dar un argumento breve, de 1-2 frases (no demostración completa). En caso de "Falso" dar un contraejemplo. Cada inciso son 5 pts. Si haces más que 10 cuentan los mejores 10.

1. Si f es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada γ en U.

   ▷ Falso. $f(z) = 1/z$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$ pero $\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i$.

   Nota. Si U es simplemente conexa es cierto. Tambien es cierto en otros casos. Por ejemplo, si U es el complemento de un número finito de puntos de otro abierto simplemente conexo donde los resíduos de f se anulan. Por ejemplo, $f(z) = 1/z^2$ en $U = \mathbb{C}^*$.

2. Toda función holomorfa acotada en un abierto conexo no acotado $U \subset \mathbb{C}$ es constante.

   ▷ Falso. $f(z) = 1/z$ es acotada en $U := \{|z| > 1\}$.

   Nota. Para $U = \mathbb{C}$ es cierto, por Liouville.

3. La suma de los residuos de una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ es 0.

   ▷ Cierto. Sean $z_1, \ldots, z_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ los polos de una función meromorfa f (es un conjunto finito, de otro modo tendran un punto de acumulación, ya que $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto, y f sería constante ∞). Sean $D_1, \ldots, D_n$ discos cerrados disjuntos tal que el único polo de f en D_k es z_k. Sea U el complemento en $\widehat{\mathbb{C}}$ de la unión de estos discos. Así que f es holomorfa en U, por lo que

   $$0 = \int_{\partial U} f(z)dz = -\sum_k \int_{\partial D_k} f(z)dz = -2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k).$$

   Nota. El inciso y la demostración siguen siendo ciertos para 1-forma meromorfa en cualquier superficie de Riemann compacta. Por ejemplo, $\mathbb{C}/\Lambda$.

4. Si f es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y no se anula a lo largo de una curva cerrada γ en U entonces $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$.

   ▷ Falso. Para $f(z) = z$, γ el circulo $|z| = 1$, la integral es $2\pi i$.

   Nota. En general, si $\gamma = \partial V$ y f es holomorfa en V, la integral es $2\pi i$ por el número de ceros de f en V.

5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de D.

   ▷ Cierto. Usando por ejemplo el criterio de Weierstrass, el radio de convergencia de la serie es 1.

6. Si f, g son dos funciones enteras tal que $f(k) = g(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces $f = g$.

   ▷ Falso. Por ejemplo, $f(z) = \sin(\pi z)$, $g = 0$. Otro: $g(z) = \sin(\pi z)h(z)$, h cualquier función entera.

   Nota. $\mathbb{Z}$ no tiene puntos de acumulación, por lo que el teorema de indentidad no aplica.

7. Si f, g son dos funciones holomorfas en $\mathbb{C}^*$ tal que $f(1/n) = g(1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $f = g$.

   ▷ Falso. Por ejemplo, $f(z) = \sin(\pi/z)$, $g = 2\sin(\pi/z)$. Otro: $g(z) = \sin(\pi/z)h(z)$, h cualquier función holomorfa en $\mathbb{C}^*$.

   Nota. El límite de la sucesión queda fuera del dominio de definición de las funciones, por lo que no aplica el teorema de identidad.

8. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ distintos, los abiertos $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ y $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ son biholomorfos.

   ▷ Cierto. Se usa un automorfismo de $\mathbb{C}$ (una similitud) que manda $0 \mapsto z_1$, $1 \mapsto z_2$; $f(z) = (z_2 - z_1)z + z_1$.

   Nota. Quitando ≥ 3 puntos es más interesante. Se obtiene una superficie de Riemann *hiperbólica* (su cubierta universal holomorfa es D) y sí importa la ubicación de los puntos.

9. Dados $z_1, z_2 \in D$ distintos, existe una $g \in \mathrm{Aut}(D)$ tal que $g(0) = z_1, g(1/2) = z_2$.

   ▷ Falso. Por ejemplo, $z_1 = 0$, $z_2 = 3/4$. Si $g(0) = 0$, por el Lemma de Schwartz, $|g(1/2)| \leq 1/2$.

   Nota. Existe en D una métrica d que es $\mathrm{Aut}(D)$-invariante, así que una condición necesaria para que exista tal g es $d(z_1, z_2) = d(0, 1/2)$. La condición es tambien suficiente.

10. Dados $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos, existe una $g \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $g(z_1) = 0, g(z_2) = 1, g(z_3) = \infty$.

    ▷ Cierto. $g(z) = \dfrac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$.

11. Si una función meromorfa $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ no es suprayectiva entonces es constante.

    ▷ Cierto. Tal función es racional, $f(z) = p(z)/q(z)$, con $p(z), q(z)$ polinomios primos relativos (sin factores comunes). Si $c \in \mathbb{C}$, una solución de la equación $f(z) = c$ es una raíz de la ecuación polinomial $p(z) - cq(z) = 0$. Para $c = \infty$, una solución es un cero de $q(z)$, o si q es constante, $f(\infty) = \infty$.

    Nota. El inciso es cierto para cualquier función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas y conexas. Tal función es una *cubierta ramificada.*

12. Si f es holomorfa en D entonces se extiende a una función continua en $\overline{D}$.

    ▷ Falso. $f(z) = 1/(1 - z)$ no se extiende continuamente a $z = 1$ ya que $\lim\limits_{z \to 1} f(z) = \infty$.

    Nota. En este ejemplo la f no se extiende a un solo punto de ∂D. Hay ejemplos en donde no se extiende a *ningun* punto de ∂D.

13. Si f, g son dos funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ con los mismos ceros y polos (contados con multiplicidad), entonces f/g es una constante.

    ▷ Falso. $f(z) = e^z$ y $g(z) = 1$ no tienen polos ni ceros.

    Nota. El inciso en cierto en $\widehat{\mathbb{C}}$.

14. Si f es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces tiene una primitiva (una función holomorfa en U cuya derivada es f).

$\triangleright$ Falso. Por ejemplo, $f(z) = 1/z$ en $U = \mathbb{C}^*$. Si $f = g'$ para alguna g holomorfa, entonces para cualquier curva parametrizada $\gamma : [a,b] \to U$, $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma g'(z)dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(0))$, por lo que la integral se anula para una curva cerrada, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Pero en nuestro caso $\displaystyle\int_{|z|=1} dz/z = 2\pi i$.

Nota. El inciso es cierto si U es simplemente conexo, o más general, si $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ para toda curva cerrada en U. Por ejemplo, $f(z) = 1/z^2$ lo satiface en $U = C^*$, ya que el residuo en 0 se anula.