Práctica para el examen parcial

(En construcción)

Fecha del examen: miercoles 6 nov, 2024 (optativo)

Cierto o Falso

1. Toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ es racional.
2. Toda función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ es racional.
3. Toda función meromorfa en H es racional.
4. Toda función holomorfa acotada en un abierto conexo no acotado $U \subset \mathbb{C}$ es constante.
5. Si f es entera y existe un $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq |z|^2$ para $|z| > M$, entonces f es un polinomio de grado ≤ 2.
6. Si f es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada orientada γ en U.
7. Si f es holomorfa en un abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$ entonces $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier curva cerrada orientada γ en U.
8. La suma de los residuos de una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ es 0.
9. Existe una función holomorfa acotada no constante en H.
10. Si z_0 es una singularidad aislada esencial de $f(z)$ entonces f alcanza cada valor complejo en una vecindad arbitrariamente pequeña de z_0.
11. Si z_0 es una singularidad aislada esencial de $f(z)$ entonces f alcanza arbitrariamente cerca a cualquer valor complejo en una vecindad arbitrariamente pequeña de z_0.
12. Una función holomorfa sin ceros en un dominio puede escribirse como la exponencial de otra función holomorfa en ese dominio.
13. La función $f(z) = e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.
14. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge uniformemente en $\mathbb{C}$.
15. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.
16. Si f_n son holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y convergen uniformamente en cualqueir subconjunto compacto de U a una funcion f en U entonces f es holomorfa.
17. Sean f, g holomorfas en D tal que $f(a_n) = g(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\{a_n\} \subset D$ y $a_n \to 0$. Entonces $f = g$.
18. Sean f, g holomorfas en D tal que $f(a_n) = g(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\{a_n\} \subset D$ y $a_n \to 1$. Entonces $f = g$.

19. Sea $U = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{x+iy \mid x=k,\ y \geq 0\}$. Entonces existe un biholomorfismo $f : U \to D$.

20. Una función holomorfa acotada en $D \setminus \{0\}$ se extiende a una funcion holomorfa en D.

21. Toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ es una función racional.

22. Si alguna derivada de una función entera es acotada entonces la función es un polinomio.

23. Existe una función holomorfa f en $U := \{\mathrm{Re}(z) > 1\}$ tal que $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in U$.

24. Dados $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos, existe una $g \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $g(z_1) = -1,\ g(z_2) = 0,\ g(z_3) = 1$ y $g(z_4) = \infty$.

25. Dados $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos, existe una $g \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $g(z_1) = -1,\ g(z_2) = 0,\ g(z_3) = 1$.

26. Dados $z_1, z_2 \in D$ distintos, existe $g \in \mathrm{Aut(D)}$ tal que $g(0) = z_1, g(1/2) = z_2$.

27. Si $f : D \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces existen constantes complejas $\{a_n\}$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde la convergencia de la serie es uniforme en $\{|z| \leq r\}$ para todo $0 < r < 1$.

28. Si $f : D \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces se extiende a una función continua $\overline{D} \to \mathbb{C}$.

29. Si f, g son dos funciones meromorfas no nulas en $\widehat{\mathbb{C}}$ con los mismos ceros y polos (contados con multiplicidad), entones f/g es una constante.

30. Si f, g son dos funciones meromorfas no nulas en $\mathbb{C}$ con los mismos ceros y polos (contados con multiplicidad), entones f/g es una constante.

31. Si f, g son dos polinomios no nulos con los mismos ceros (contados con multiplicidad), entones f/g es una constante.

32. Si $f : D \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces tiene una primitiva (una función holomorfa en D cuya derivada es f).

33. Una función holomorfa inyectiva preserva ángulos, pero no necesariamente distancias.

34. Si f es meromorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y tiene un polo en $z_0 \in U$, entonces $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

35. Una función holomorfa no constante en D alcanza su máximo módulo en algun punto de D.

36. La parte real de una función holomorfa es armónica.

37. Sea f una función holomorfa en un abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$ que contiene a 0. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto $S_N = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq N\} \subset U$. Entonces los valores de f en U se determinan por sus valores en S_N.

38. Si f es holomorfa en D y $f' = 0$ entonces f es constante.

39. Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y una función diferenciable $f : U \to \mathbb{C}$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son necesarias y suficientes para que f sea holomorfa.

40. Para cada abierto conexo $U \subset D$ existe una aplicación biholomorfa $U \to D$.

41. Una función holomorfa con una singularidad esencial aislada toma cualquier valor complejo infinitad de veces en cada vecindad de la singularidad.

42. Una función meromorfa en $\mathbb{C}$ solo puede tener un número finito de polos.