Posgrado en metmáticas básicas, CIMAT.

Examen general de variable compleja 1

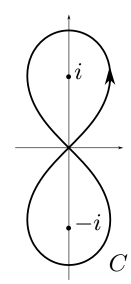
9 ene, 2025

Cada uno de los problemas vale 10 puntos. Hay que juntar por lo menos 50 puntos, resolviendo por lo menos 1 problema de cada una de las 4 partes. Duración: 4 hrs.

Parte A

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función.
   a) Define: f es holomorfa.
   b) Demuestra: f es holomorfa si y solo si es diferenciable y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
2. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $z_0 \in U$ y $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada. Demuestra: f se extiende a una funcion holomorfa en U.

Parte B



3. Calcular la integral
$$\int_C \frac{dz}{1+z^2},$$
donde C es la curva en el dibujo.
4. Calcular
$$\int_C \frac{dz}{1+z^{10}},$$
donde C es el círculo de radio 2, centrado en 0, orientado contra las manecillas del reloj.

Parte C

5. Enunciar y demostrar el Lemma de Schwarz.
6. Usar el Lemma de Schwarz para encontrar a todos los automorfismos holomorfos de $D = \{|z| < 1\}$.

Parte D

7. Enunciar y demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra.
8. *a*) Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Demuestra que un límite uniforme de funciones holomorfas en U es una función holomorfa.
   b) Dar un contraejemplo que muestra que el anterior no es necesariamente cierto con funciones diferenciables en lugar de holomorfas.