# Examen extraordinario

17 dic, 2024

*Resolver 4 de los siguientes 5 problemas. Si haces más se cuenta las mejores 4.*

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función.

   *Definición.* $f$ es holomorfa si para todo $z \in U$ existe un $c \in \mathbb{C}$ tal que para toda sucesion $\{z_i\} \subset U \setminus \{z\}$ tal que $z_i \to z$ se cumple

   $$\lim_{i\to\infty} \frac{f(z_i) - f(z)}{z_i - z} = c.$$

   Demuestra: $f$ es holomorfa ssi es diferenciable y sus derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

2. *a*) Enunciar y demostrar el principio de máximo módulo para funciones holomorfas.

   *b*) Usa el prinicpio de máximo módulo para demostrar: la imagen de una función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto, es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.

3. *a*) Enunciar y demostrar el Lemma de Schwarz.

   *b*) Explica cómo se usa este Lemma en el teorema de mapeo de Riemann.

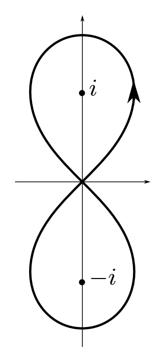
4. *a*) Enunciar y demostrar el teorema del residuo.

   *Nota.* Puedes usar otros teoremas, mientras los anuncias con precisión y verificas que se cumplen sus condiciones.

   *b*) Calcular la integral

   $$\int_C \frac{dz}{1+z^2},$$

   donde $C$ es la curva en el dibujo.




5. *a*) Demuestra: el orden de una función elíptica es por lo menos 2.

   *b*) Sea $\Lambda \subset \mathbb{C}$ una retícula de rango 2. Demuestra que la suma

   $$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \left( \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

   converge a una función elíptica y determina su orden.