Examen final

3 dic, 2024

Resolver el 1er problema y 2 de los otros 4. Si haces más se consideran los mejores 2.

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función diferenciable.

   a) (5) Define: f es holomorfa.

   b) (10) Demuestra: f es holomorfa si y solo si satiface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

   c) (10) Demuestra: una función entera acotada es constante.

2. *a*) (25) Enunciar y demostrar el teorema de Arzela Ascoli.

   b) (15) Explicar como se usa este teorema en la demostración del teorema de mapeo de Riemann.

3. *a*) (25) Enunciar y demostrar el Lemma de Schwarz.

   b) (15) Explicar como se usa este Lemma en la demostración del teorema de mapeo de Riemann.

4. *a*) (5) Define: El residuo de una función holomorfa en una singularidad aislada.

   b) (25) Enunciar y demostrar el teorema del residuo.
   (Nota. Puedes suponer el Teorema de Stokes.)

   c) (10) Usar el teorema del residuo para calcular la integral

   $$\int_C \frac{dz}{\operatorname{sen} z} \ ,$$

   donde C es el círculo de radio 5 centrado en $z = 2$, orientado en el sentido de las manecillas del reloj.

5. *a*) (5) Define: función elíptica, su orden, un paralelogramo fundamental.

   b) (10) Demuestra: el orden de una función elíptica es por lo menos 2.

   c) (25) Sea $\Lambda \subset \mathbb{C}$ una retícula de rango 2. Demuestra que la suma

   $$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

   converge a una función elíptica y determina su orden.