Tarea núm. 4 - solución del problema 4

Problema 4. Encuentra a todas las soluciones enteras de $a^2 + b^2 = 2c^2$ con $0 < a, b, c < 50$. Mismo para $a^2 + 2b^2 = c^2$.

El método. La idea que usamos en las ternas pitagóricas (ver las notas de la clase del 23 ago, pág. 3) funciona para cualquier *ecuación diafantina cuadrática homogenea en 3 variables con coeficientes enteras*,

$$h_{11}a^2 + h_{12}ab + h_{13}ac + h_{22}b^2 + h_{23}bc + h_{33}c^2 = 0, \tag{1}$$

donde $h_{ij} \in \mathbb{Z}$. Lo que buscamos son soluciones (a, b, c) de la ecuación con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, no todos 0. Dada una tal solución, dividimos la ecuación entre c^2 y obtenemos un punto racional $(a/c, b/c)$ de una *cónica* (elipse, parábola o hipérbola),

$$h_{11}x^2 + h_{12}xy + h_{13}x + h_{22}y^2 + h_{23}y + h_{33} = 0. \tag{2}$$

Conversamente, a cada punto racional de la cónica (2) corresponde una solución de la ecuación original (1): encontrando un denominador común c de las coordenadas del punto racional, las escribimos como $(a/c, b/c)$, y entonces (a, b, c) es una solución de (1).

Nota. La correspondencia entre las soluciones de (1) y (2) no es una biyección. Claramente, si (a, b, c) es una solución de (1) también (ka, kb, kc) lo es, para todo entero k. Decimos que las dos soluciones, (a, b, c) y (ka, kb, kc), son *equivalentes.* Las soluciones equivalentes a una solución es una *clase de equivalencia* de soluciones. Lo que tenemos es una biyección entre las clases de equivalencia de soluciones de (1) y los puntos racionales de (2).

Ahora fijamos un punto racional $P_0 = (x_0, y_0)$ de la cónica (2) (suponiendo que existe). Las rectas que pasan por P_0 son $y - y_0 = p(x - x_0)$, y se parametrizan por su pendiente p. Cada una de estas rectas (excepto la recta tangente en P_0) intersecta la cónica en un punto adicional, racional también, si y solo si p es racional (ejercicio!). Escribimos $p = m/n$, con m/n primos relativos, y obtenemos de este modo una parametrización de los puntos racionales de la cónica, y por lo tanto de las (clases de equivalencia de) soluciones de la ecuación original (1), por parejas de enteros (m, n). Claramente, basta tomar parejas (m, n) que son primas relativas.

Ahora veremos cómo funciona la idea en los dos ejemplos que tenemos en este problema.

La ecuación $a^2 + b^2 = 2c^2$. La cónica correspondiente es $x^2 + y^2 = 2$ (un círculo). Tomamos el punto racional $P_0 = (-1, -1)$. La recta con pendiente p que pasa por este punto es $y = p(x+1) - 1$. Resolviendo el sistema $\{x^2 + y^2 = 2,\ y = p(x+1) - 1\}$, con $p = m/n$, obtenemos $x = (-m^2 + 2mn + n^2)/(m^2 + n^2)$, $y = (m^2 + 2mn - n^2)/(m^2 + n^2)$, así que a la pareja (m, n) corresponde la solución (a, b, c) con

$$a = -m^2 + 2mn + n^2,\ b = m^2 + 2mn - n^2,\ c = m^2 + n^2, \tag{3}$$

Basta buscar soluciones con $a < b$, o sea $0 < x < y$. Estas corresponden a rectas con pendiente $1 < p < 1 + \sqrt{2}$, o sea, $n < m < n(1 + \sqrt{2})$. Las parejas (m, n) de primos relativos, con $-m^2+2mn+n^2, m^2+2mn-n^2, m^2+n^2<50$ y $n<m<n(1+\sqrt{2})$ son

$$(2,1),(3,2),(4,3),(5,3),(5,4).$$

Las ternas correspondientes, usando las ecuaciones (3), son

$$(1,7,5),(7,17,13),(17,31,25),(14,46,34),(31,49,41).$$

(5 ternas). Además, tenemos otras 8 ternas que son múltiples de estas ternas,

$$(2,14,10),\ldots,(7,49,35),(14,34,26),(7,23,17).$$

Así que son 5+8=13 ternas con $a<b$, y otras 13 con $a>b$. En total, 26 soluciones.

La ecuación $a^2+2b^2=c^2$. La cónica correspondiente es $x^2+2y^2=1$ (una elipse). Tomamos el punto racional $P_0=(-1,0)$. La recta con pendiente p que pasa por este punto es $y=p(x+1)$. Resolviendo el sistema $\{x^2+2y^2=1,\ y=p(x+1)\}$, con $p=m/n$, obtenemos $x=(n^2-2m^2)/(2m^2+n^2),\ y=2mn/(2m^2+n^2)$, así que a la pareja (m,n) corresponde la solución (a,b,c) con

$$a=-2m^2+n^2,\ b=2mn,\ c=2m^2+n^2. \tag{4}$$

Buscamos soluciones con $a,b,c>0$, o sea $x,y>0$. Estas corresponden a rectas con pendiente $0<p<1/\sqrt{2}$, o sea, $n>m\sqrt{2}>0$. Las parejas de enteros positivos (m,n), primos relativos, con $-2m^2+n^2,\ 2mn,\ 2m^2+n^2<50$ y $n>m\sqrt{2}$ son

$$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,5),(3,5).$$

Las ternas primitivas correspondientes, usando las ecuaciones (4), son

$$(1,2,3),(7,6,11),(7,4,9),(23,10,27),(17,6,19),(1,12,17),(17,20,33),(7,30,43).$$

(8 ternas). Además, tenemos múltiples de estas soluciones,

$$(2,4,6),\ldots,(18,36,48),(14,12,22),\ldots,(28,24,44),$$
$$(14,8,18),\ldots,(35,20,45),(34,12,38),(2,24,34)$$

(8+3+3+1+1=16 ternas). En total, 8+16=24 soluciones.

Nota. La solución arriba de las 2 ecuaciones tiene una pequeña falla lógica. Puedes encontrarla?